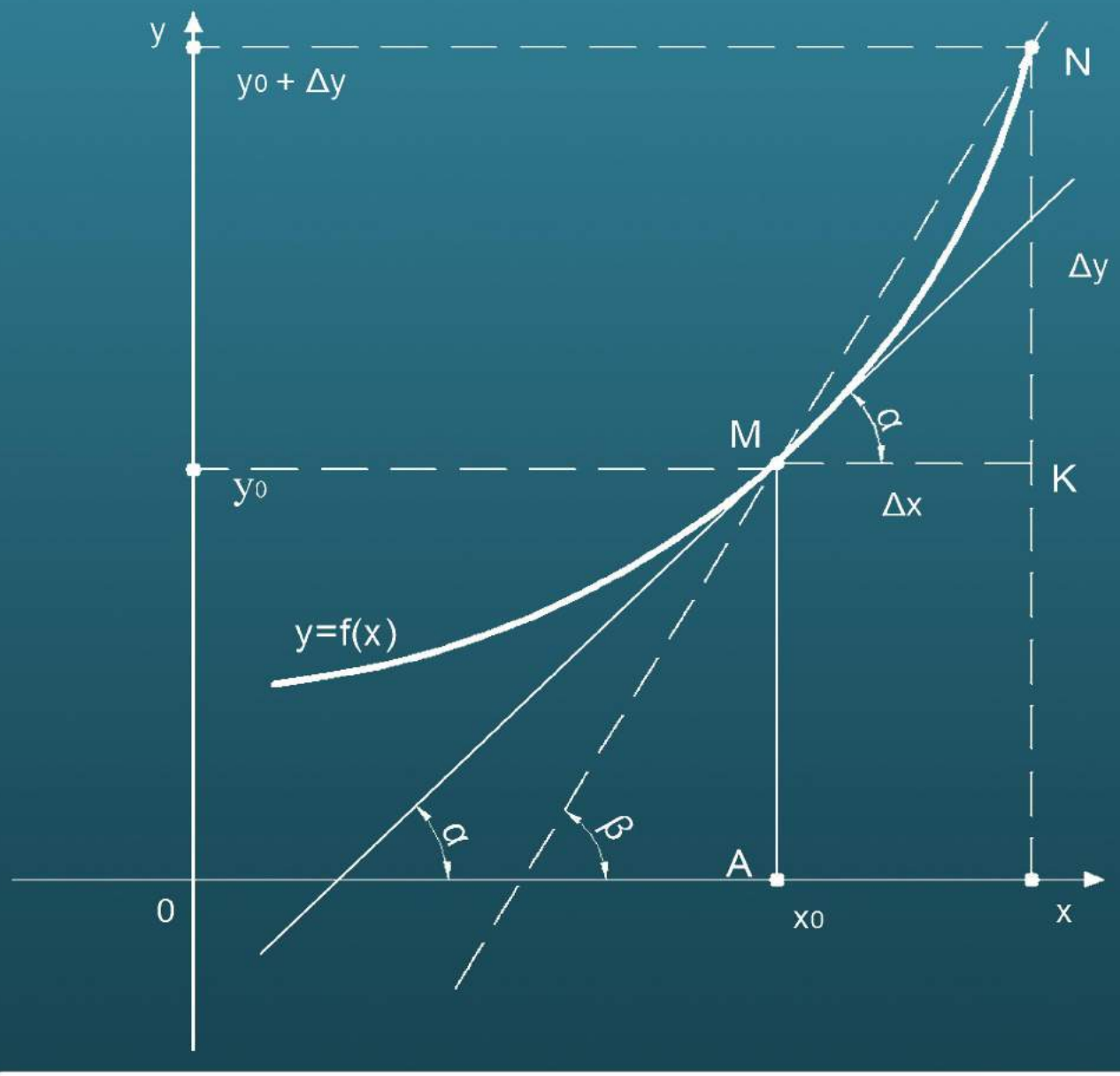
Є. А. Макаренков
М. В. Матяш
А. В. Сясєв

ПРАКТИКУМ ІЗ КУРСУ <<ВИЩА МАТЕМАТИКА>>

Диференціальне числення функцій однієї змінної



Дніпро
2017

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Механіко-математичний факультет
Кафедра диференціальних рівнянь

Є.А. Макаренков, М.В. Матяш, А.В. Сясєв

ПРАКТИКУМ ІЗ КУРСУ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Диференціальне числення функцій однієї змінної

Рекомендовано Вченою радою
Дніпровського національного університету
імені Олеся Гончара
Протокол №12 від 26.04.2017

Дніпро – 2017

УДК 517 (07)
ББК 22.16
М 15

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф. І.В. Клименко

канд. фіз.-мат. наук, доц. М.Б. Вакарчук

М 15 Макаренков, Є.А. Практикум із курсу «Вища математика». Диференціальне числення функцій однієї змінної [Текст] / Є.А. Макаренков, М.В. Матяш, А.В. Сясєв. — Д.: Дніпровський нац. ун-т, 2017. — 80 с.

Викладено стислі теоретичні відомості і детальні розв'язання практичних завдань з розділу вищої математики: «Диференціальне числення функцій однієї змінної». Наведено варіанти індивідуального домашнього завдання і приклади тестів з відповідями.

Призначений для студентів усіх спеціальностей, які вивчають дисципліну «Вища математика».

Навчальне видання

Євген Анатолійович Макаренков,
Марина Вікторівна Матяш,
Андрій Валерійович Сясєв

Практикум із курсу «Вища математика»
Диференціальне числення функцій однієї змінної

В авторській редакції
Оригінал-макет А.В. Сясєв

Підписано до друку 26.04.2017. Формат 60x841/16. Папір друкарський. Друк плоский.
Ум. друк. арк. 5. Ум. фарбовідб. 5. Облік.- вид. арк. 5. Тираж 100 пр.

ДНУ ім. О. Гончара, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010.

© Макаренков Є.А., Матяш М.В., Сясєв А.В., 2017

Зміст

Вступ **5**

1 Диференціювання функцій **6**

1.1. Похідна функції однієї змінної 6

1.2. Механічний, фізичний та геометричний зміст похідної 7

1.3. Диференційованість та неперервність функцій 10

1.4. Правила диференціювання 14

1.5. Похідна степеневої, показникової, логарифмічної, тригонометричної функцій 16

1.6. Диференціювання складеної функції 21

1.7. Похідна оберненої функції 24

1.8. Похідна функції, заданої параметрично 27

1.9. Похідна неявно заданої функції 28

1.10. Логарифмічне диференціювання. Похідна показниково-степеневої функції 29

1.11. Похідні вищих порядків 31

1.12. Таблиця похідних 32

2 Застосування диференціального числення **36**

2.1. Диференціал функції та його застосування 36

2.2. Правило Лопіталя 38

2.3. Застосування диференціального числення до дослідження функцій 43

2.3.1. Монотонність функції 44
2.3.2. Локальний екстремум функції 46
2.3.3. Найбільше і найменше значення функції на відрізку . . . 49
2.3.4. Опуклість і угнутість функції. Точки перегину 51
2.3.5. Асимптоти кривої 52
2.3.6. Схема дослідження функції та побудова її графіка 54

Індивідуальні домашні завдання **61**

Приклади тестів **77**

Література **79**

Вступ

Диференціальне числення — розділ вищої математики, в якому вивчаються похідні і диференціали функцій та їх застосування до дослідження функцій. Основним поняттям диференціального числення є поняття похідної, яке визначає швидкість зміни величин, що змінюються нерівномірно.

Запропоноване навчальне видання може бути корисним для самостійної роботи студентів при вивченні розділу «Диференціальне числення функцій однієї змінної», а також для викладачів при підготовці і проведенні практичних занять.

Практикум містить стислі теоретичні відомості і докладні розв'язання практичних завдань, варіанти індивідуального домашнього завдання і приклади тестів з відповідями.

В результаті освоєння розділу студент повинен: знати основні поняття та означення; вміти самостійно використовувати математичний апарат; володіти первинними навичками і основними методами розв'язування математичних задач з загально інженерних і спеціальних дисциплін.

Розділ 1

Диференціювання функцій

1.1. Похідна функції однієї змінної

Диференціальне числення — розділ математики, в якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів.

Нехай задано функцію $y = f(x)$, яка визначена на інтервалі $(a; b)$.

Надамо аргументу x приріст Δx і знайдемо відповідний йому приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Запишемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ і знайдемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Якщо ця границя існує, то її називають похідною функції і позначають $f'(x)$ або y', f'_x, y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$.

Означення 1.1. *Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля, тобто*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Означення 1.2. *Операція знаходження похідної називається диференціюванням.*

Значення похідної в точці $x = x_0$ позначається $f'(x_0)$, або $y'\Big|_{x=x_0}$, або $y'(x_0)$.

1.2. Механічний, фізичний та геометричний зміст похідної

Задача 1.1. Нехай матеріальна точка M рухається нерівномірно вздовж прямої і за час t проходить відстань S. Визначити швидкість її руху в кожний момент часу.

Розв'язання. Кожному значенню часу t відповідає відстань $OM = S$ від деякої фіксованої точки O, тобто $S = S(t)$ (рис. 1.1). Нехай з моменту t пройшов деякий час Δt. За цей час точка перейде в положення M_1 і пройде відстань $MM_1 = \Delta S$. Відстань OM_1 позначимо $S(t + \Delta t)$.

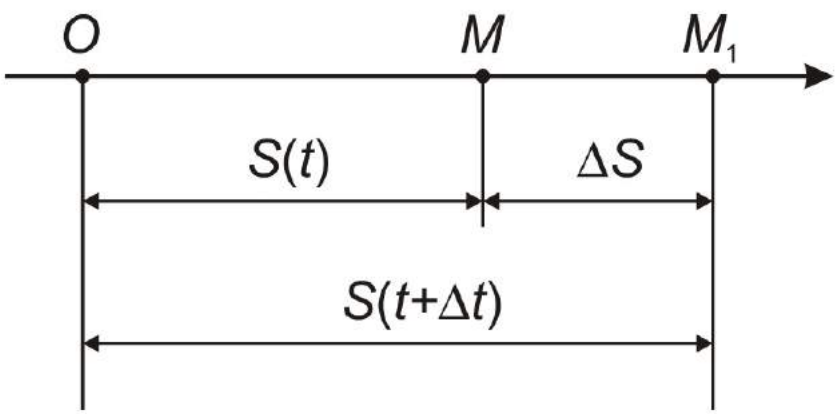


Рис. 1.1

Середня швидкість v руху точки за час Δt буде

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Якщо $\Delta t \to 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$ є швидкість руху $v(t)$ в кожний момент часу t.

Користуючись означенням похідної, розв'язок задачі можна тлумачити так: швидкість руху в даний момент часу – це похідна функції $S(t)$.

Отже, $v(t) = S'(t)$. Це – механічний зміст похідної.

Задача 1.2. Задано рівняння кривої $y = f(x)$. Знайти рівняння дотичної і нормалі, що проведені до неї в точці M.

Означення 1.3. *Дотичною до кривої в точці M називається граничне положення MT січної MM_1, якщо точка M_1 січної MM_1 необмежено наближається вздовж кривої до точки M (рис. 1.2).*

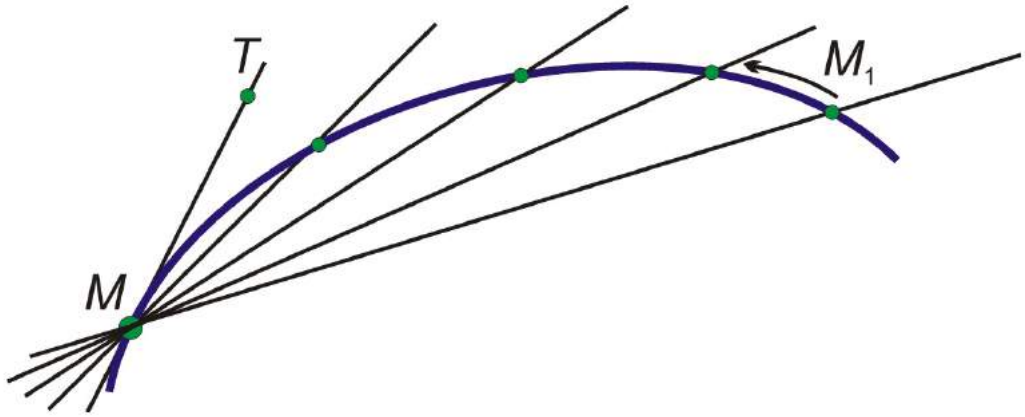


Рис. 1.2

Означення 1.4. *Нормаллю до кривої в точці M називається пряма, яка проходить через цю точку перпендикулярно до дотичної в цій точці.*

Розв'язання. Рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$ має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$ в прямокутній системі координат, k — кутовий коефіцієнт прямої: $k = \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 1.3).

Нехай $y = f(x)$ — неперервна крива, що має в точці M дотичну (не вертикальну). Знайдемо кутовий коефіцієнт цієї дотичної.

Для цього проведемо січну MM_1 і позначимо через φ кут, який утворює січна з віссю Ox. Тоді

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то й $\Delta y \to 0$, тому що крива $y = f(x)$ неперервна. Точка M_1 необмежено наближається до точки M по кривій і січна займає положення дотичної.

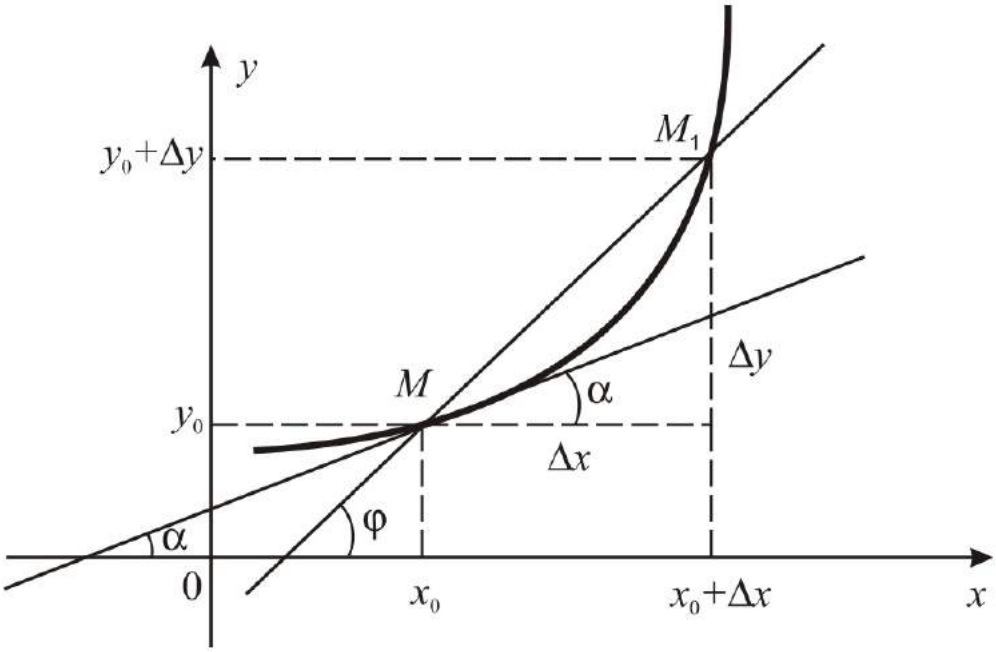


Рис. 1.3

Тоді $\varphi \to \alpha$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha = k$. Оскільки

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x),$$

то рівняння дотичної в точці M запишеться у вигляді $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Рівняння нормалі в цій точці $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Отже, кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$ — це значення похідної функції $y = f(x)$ в цій точці, тобто $f'(M_0)$.

В цьому полягає геометричний зміст похідної.

Про фізичний зміст похідної можна сказати: якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y' = f'(x)$ — є швидкість зміни цього процесу. Наприклад, швидкість хімічної реакції речовини $N'(t)$ — це похідна за часом t від кількості речовини $N(t)$, що вступила у реакцію.

1.3. Диференційованість та неперервність функцій

Означення 1.5. *Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці $x = x_0$, то говорять, що вона в цій точці диференційована. Якщо функція диференційована в кожній точці відрізку $[a, b]$, або (a, b), то говорять, що вона диференційована на відрізку (інтервалі).*

Теорема 1.1. *Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці $x = x_0$, то вона в цій точці неперервна.*

Обернене твердження невірно. Наприклад, функція $y = \sqrt[3]{x}$ в точці $x = 0$ неперервна, але похідна в цій точці не існує.

Приклад 1.1. Знайти похідну сталої величини.

Розв'язання. Нехай $y = f(x) = C$ (C – стала величина).

1. Надамо аргументу x приріст $\Delta x \neq 0 : x + \Delta x$. Маємо $f(x + \Delta x) = C$.
2. Знайдемо приріст $\Delta y : \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$.
3. Запишемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x}$.
4. Знайдемо границю відношення $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

Відповідь: $(C)' = 0$.

Приклад 1.2. Знайти похідну функції $y = x^2$ за означенням.

Розв'язання.

1. Надамо аргументу x приріст $\Delta x \neq 0 : x + \Delta x$.
2. Знайдемо приріст Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

3. Запишемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

4. Знайдемо границю відношення $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

Відповідь: $y' = 2x$. або $(x^2)' = 2x$.

Приклад 1.3. Знайти похідну функції $y = \sin x$ за означенням.

Розв'язання. Послідовно: перейдемо від x до $x + \Delta x$, тоді

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x;$$

відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\dfrac{(x + \Delta x) - x}{2}\cos\dfrac{(x + \Delta x) + x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\dfrac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Границя відношення

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\dfrac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Відповідь: $(\sin x)' = \cos x$.

Приклад 1.4. Знайти похідну функції $y = \cos x$ за означенням.

Розв'язання. Для цієї функції

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{x + \Delta x + x}{2}\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} =$$

$$= -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x.$$

Відповідь: $(\cos x)' = -\sin x$.

Приклад 1.5. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2$ в точці $A(2; 4)$.

Розв'язання. В цьому випадку рівняння дотичної має вигляд

$$y - 4 = y'(2)(x - 2),$$

нормалі

$$y - 4 = -\frac{1}{y'(2)}(x - 2),$$

оскільки $x_0 = 2$, а $y_0 = 4$.

Обчислемо похідну: $y'(x) = (x^2)' = 2x$. В точці $x_0 = 2$ матимемо

$$y'(2) = y'\Big|_{x=2} = 4.$$

Тоді $y - 4 = 4(x - 2)$ — рівняння дотичної, $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$ — рівняння нормалі. В загальному вигляді: $4x - y - 4 = 0$, $x + 4y - 18 = 0$.

Відповідь: $4x - y - 4 = 0$ — рівняння дотичної, $x + 4y - 18 = 0$ — рівняння нормалі.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти похідну функції за означенням: а) $y = x^3$, б) $y = e^x$.

2. Знайти похідну функції за означенням та обчислити значення похідної в точці x_0:

$$a)\ y = x^2 + 1,\ x_0 = 5; \quad б)\ y = \sin 2x,\ x_0 = 0, \quad в)\ f(t) = 4t^2 - 3t + 8,\ t = 1.$$

3. Знайти кут між лініями $y = \sin x$ і $y = \cos x$ при $0 \le x \le \pi$. Кутом між кривими вважають кут між дотичними до цих кривих в точці перетину кривих.

4. Знайти довжину відрізку дотичної до параболи $y = x^2$ від точки перетину дотичної з віссю Ox до точки дотику $M(2; 4)$.

5. Матеріальна точка рухається за законом $S(t) = t^3 + 3t + 1$, де $S(t)$ — відстань в метрах. Знайти середню швидкість руху матеріальної точки на проміжку часу від $t_0 = 1c$ до $t_1 = 5c$ та швидкість в момент часу $t_0 = 1c$.

Домашні завдання

1. Знайти за означенням похідну функції:

$$a)\ y = 5x^3 - 2x + 7, \quad б)\ y = \frac{1}{x}, \quad в)\ y = \sqrt{x}.$$

2. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3$ в точці $x_0 = -2$.

3. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 2x - x^2$ в точках перетину її з віссю Ox.

Відповіді:

1. а) $15x^2 - 2$, б) $-\dfrac{1}{x^2}$, в) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. $12x - y + 16 = 0, \quad x + 12y + 98 = 0.$

3. $2x - y = 0,\ x + 2y = 0; \quad 2x + y - 4 = 0,\ x - 2y - 2 = 0.$

Завдання для самоперевірки

1. Дати означення похідної функції $y = f(x)$ в точці x.

2. Як знайти похідну за означенням?

3. Охарактеризувати символи $f'(x)$ і $f'(x_0)$.

4. Довести, користуючись означенням похідної, що $(3x^2-5x+2)' = 6x-5$.

5. Дотична до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$ нахилена до вісі Ox під кутом 45°. Чому дорівнює $f'(x_0)$?

6. Який зміст похідної функції $S = S(t)$ в точці t?

7. Дати означення функції, диференційованої в точці і диференційованої на відрізку.

8. Записати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$.

9. Що можна сказати про кут, який утворює дотична з віссю Ox, якщо $f'(x) > 0,\ f'(x) < 0,\ f'(x) = 0,\ f'(x) = \infty$?

10. Якщо функція диференційована в точці x, чи буде вона неперервною в ній? І навпаки: чи буде неперервна в точці x функція диференційованою в цій точці?

1.4. Правила диференціювання

Теорема 1.2. *Похідна алгебраїчної суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій.*

□ Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ — диференційовані функції на інтервалі (a, b). Позначимо $y = u + v$. Тоді за означенням похідної

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)] - [u(x) + v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)] + [v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Доведення для різниці $(u - v)' = u' - v'$ аналогічне.

Отже, $(u \pm v)' = u' \pm v'$. ■

Теорема 1.3. *Похідна добутку двох функцій $(uv)'$ дорівнює добутку похідної першого співмножника на другий плюс добуток першого співмножника на похідну другого: $(uv)' = u'v + uv'$.*

□ Використовуючи означення похідної для $y = uv$, маємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}.$$

Враховуючи, що $u(x+\Delta x) = u(x)+\Delta u$, а $v(x+\Delta x) = v(x)+\Delta v$ останній вираз перепишимо наступним чином

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x) + \Delta u][v(x) + \Delta v] - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x)v(x) + v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u \Delta v] - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= v(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = u'v + uv',$$

оскільки $\Delta v \to 0$, якщо $\Delta x \to 0$. ■

Теорема 1.4. *Похідна частки двох функцій $\left(\frac{u}{v}\right)'$ дорівнює дробу, чисельник якого є різниця $(u'v - uv')$, а знаменник дорівнює v^2 $(v \neq 0)$, тобто*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

□ Позначимо $y = \frac{u}{v}$. За означенням похідної

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x) + \Delta u}{v(x) + \Delta v} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}.$$

Приведемо до спільного знаменника, зробимо тотожні перетворення і одержимо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x)+v(x)\Delta v}=\frac{u'v-uv'}{v^2},$$

оскільки $\Delta v\to 0$. ■

1.5. Похідна степеневої, показникової, логарифмічної, тригонометричної функцій

Теорема 1.5. *Похідну степеневої функції $y = x^n$ знаходять за формулою*

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

□ Застосуємо еквівалентність $(1+t)^n-1\approx nt$ при $t\to 0$. Тоді при $y=x^n$, матимемо

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n\left[\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^n-1\right]}{\Delta x}.$$

Якщо $t=\dfrac{\Delta x}{x}$, то $t\to 0$ і $\left[\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^n-1\right]\approx n\dfrac{\Delta x}{x}$. Тоді

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n n\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=nx^{n-1}.\ ■$$

Як наслідок $(x)'=1$.

Теорема 1.6. *Похідну показникової функції $y = a^x$ знаходять за формулою*

$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

□ Скористаємось еквівалентністю $a^\alpha-1\approx\alpha\ln a$ при $\alpha\to 0$. Тоді при

$y = a^x$, матимемо

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a. \blacksquare$$

Теорема 1.7. *Похідну логарифмічної функції* $y = \log_a x,\ (a > 0,\ a \neq 1)$ *знаходять за формулою*

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

□ Скористаємось еквівалентністю $\log_a(1+t) \approx t \log_a e$, якщо $t \to 0$. Тоді при $t = \dfrac{\Delta x}{x}$, одержимо

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \dfrac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x}{x} \log_a e}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \blacksquare$$

Як наслідок $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Приклад 1.6. Знайти похідну функції $y = Cv(x)$, де C – стала величина.

Розв'язання. Скористаємось правилом диференціювання добутку двох функцій:

$$y' = (Cv(x))' = C'v(x) + Cv'(x) = 0 + Cv'(x) = Cv'(x)$$

Відповідь: $(Cv(x))' = Cv'(x)$.

Отже, сталий множник можна виносити за знак похідної.

Приклад 1.7. Знайти $\left(\dfrac{C}{x}\right)'$, якщо $C = const$.

Розв'язання.

$$\left(\frac{C}{x}\right)' = C\left(\frac{1}{x}\right)' = C\frac{(1)'x - 1(x)'}{x^2} = C\frac{0-1}{x^2} = -\frac{C}{x^2}.$$

В цьому випадку користувались висновком ***Прикладу 1.6.*** і правилом диференцювання частки двох функцій.

Відповідь: $\left(\dfrac{C}{x}\right)' = -\dfrac{C}{x^2}$.

Приклад 1.8. Вивести похідну функції $y = \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. Запишемо $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ і знайдемо похідну частки, скориставшись виведеними раніше співвідношеннями:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Відповідь: $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Приклад 1.9. Вивести похідну функції $y = \operatorname{ctg} x$.

Розв'язання. Запишемо $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ і знайдемо похідну частки:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Відповідь: $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Приклад 1.10. Знайти похідну функції $y = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{2}{3}x^3 + x$.

Розв'язання.

$$y' = \left(\frac{1}{5}x^5\right)' - \left(\frac{2}{3}x^3\right)' + (x)' = \frac{1}{5}(x^5)' - \frac{2}{3}(x^3)' + (x)' =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot 5x^4 - \frac{2}{3}\cdot 3x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2.$$

Відповідь: $(x^2-1)^2$.

Приклад 1.11. Знайти похідну функції $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, маємо

$$f'(x) = (2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2})' = 2(\sqrt{x})' - 3(x^{\frac{2}{3}})' = 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

Приклад 1.12. Знайти похідну функції $y = x\cos x$.

Розв'язання.

$$y' = (x\cos x)' = x'\cos x + x(\cos x)' = 1 \cdot \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x.$$

Відповідь: $\cos x - x\sin x$.

Приклад 1.13. Знайти похідну функції $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2+2}$.

Розв'язання.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-2}{x^2+2}\right)' = \frac{(x^2-2)'(x^2+2) - (x^2+2)'(x^2-2)}{(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2+2) - 2x(x^2-2)}{(x^2+2)^2} = \frac{8x}{(x^2+2)^2}.$$

Відповідь: $\dfrac{8x}{(x^2+2)^2}$.

Приклад 1.14. Задано функцію $y = 2\ln x\sin x + \dfrac{x}{x^2+1}$. Знайти y'.

Розв'язання. Застосуємо правила диференціювання добутку, частки, суми двох функцій, похідні тригонометричних функцій, степеневої і логарифмічної функцій:

$$y' = \left(2\ln x\sin x + \frac{x}{x^2+1}\right)' = (2\ln x\sin x)' + \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' =$$

$$= 2[(\ln x)' \sin x + (\sin x)' \ln x] + \frac{x'(x^2+1) - (x^2+1)'x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= 2\left[\frac{1}{x}\sin x + \cos x \ln x\right] + \frac{1 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= 2\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x\right] + \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Відповідь: $2\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x\right] + \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

Завдання для аудиторної роботи

Користуючись основними правилами диференціювання, знайти похідні функцій, заданих явно:

1) $y = \frac{9}{\sqrt[3]{x^2}}$;

2) $y = (x^4 - 4)(3 \operatorname{tg} x - 1)$;

3) $y = x^3 \log_2 x$;

4) $y = 5 \cdot 2^x + \frac{3}{4} \operatorname{ctg} x$;

5) $y = x\sqrt[4]{x} + 3 \sin x$;

6) $y = \sqrt[5]{x} \sin x - \frac{\ln x}{x^2}$;

7) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;

8) $y = -10 \operatorname{tg} x + 7e^x$;

9) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + 7\sqrt{x}$;

10) $y = ax^2 + bx + c$;

11) $y = \frac{1+e^t}{1-e^t}$;

12) $y = \frac{21^v}{21^v + 1}$.

Домашні завдання

Знайти похідні заданих функцій:

1) $y = 4x^2 - 3x + 5$;

2) $y = x\sqrt[3]{x^2} - \frac{\sqrt[4]{x}}{3}$;

3) $y = x^3 \operatorname{tg} x - 10x$;

4) $y = \frac{1}{3}x^3 \sin x$;

5) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{x+1}$;

6) $y = x\sqrt{x}(3 \ln x - 2)$;

7) $y = \frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{8}x^8 + 5$;

8) $y = 2x^2 \ln x - x^4$;

9) $y = \operatorname{ctg} x + \sqrt{x}$;

10) $y = 3x^5 - 7^x$;

11) $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^4}$;

12) $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt[6]{7}$;

13) $y = 2 \arctan x + 3 \ln x$;

14) $y = \frac{3}{4x} + \frac{4x}{3}$

Відповіді:

1) $8x - 3$;

2) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{12\sqrt[4]{x^3}}$;

3) $3x^2 \operatorname{tg} x + \frac{x^3}{\cos^2 x}$;

4) $x^2 \sin x + \frac{1}{3}x^3 \cos x$;

5) $-\frac{0.5 \sin 2x + x + 1}{(x+1)^2 \sin^2 x}$;

6) $\frac{3}{2}\sqrt{x}(3 \ln x - 2) + 3\sqrt{x}$;

7) $x^4\left(\ln x - x^3 + \frac{1}{5}\right)$;

8) $2x(\ln x^2 - 2x^2 + 1)$;

9) $-\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

10) $15x^4 - 7^x \ln 7$;

11) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{x^5}$;

12) $-\frac{9}{2\sqrt{x^5}}$;

13) $\frac{2}{1 + \sqrt{x^5}} + \frac{3}{x}$;

14) $-\frac{3}{4x^2} + \frac{4}{3}$.

1.6. Диференціювання складеної функції

Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ — дві довільні функції, $u \in A$, а $x \in B$, де A і B — області їх визначення. Значення $u = \varphi(x)$ при будь-яких $x \in B$ належать області А, $\varphi(x) \in A$. Тоді $y = f[\varphi(x)]$.

Означення 1.6. *Функцію, яку одержано «накладанням» двох і більше функцій, називають складеною.*

Наприклад, функція $y = \log_5 (x + 3)$ складається з двох функцій: $y = \log_5 u$, $u = x + 3$.

Теорема 1.8. *Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну u'_x в точці x, а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці u, то складена функція $y = f[\varphi(x)]$ має похідну y'_x в точці x: $y'_x = y'_u u'_x$.*

Приклад 1.15. Задано функцію $y = \log_5 (x^2 + 3)$. Знайти y'_x.

Розв'язання. Тут «накладені» дві функції: $y = \log_5 u$, $u = x^2 + 3$. Тоді

$$y'_u = \frac{1}{u \ln 5} \quad u'_x = 2x.$$

Отже,

$$y'_x = \frac{1}{(x^2 + 3)\ln 5}(x^2 + 3)' = \frac{2x}{(x^2 + 3)\ln 5}.$$

Відповідь: $\dfrac{2x}{(x^2 + 3)\ln 5}$.

Приклад 1.16. Задано функцію $y = \sin^2 x$. Знайти y'_x.

Розв'язання.

$$y'_x = (\sin^2 x)'_x = (\sin^2 x)'_{\sin x}(\sin x)'_x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

Відповідь: $\sin 2x$.

Приклад 1.17. Задано функцію $y = \ln(\operatorname{tg} x^3)$. Знайти y'_x.

Розв'язання. Тут функція складена з трьох складових:

$$y = \ln u, \quad u = \operatorname{tg} v, \quad v = x^3.$$

Тоді $\quad y'_x = (\ln u)'_u (\operatorname{tg} v)'_v (x^3)'_x \quad$ або

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} x^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\operatorname{tg} x^3 \cos^2 x^3}.$$

Відповідь: $\dfrac{3x^2}{\operatorname{tg} x^3 \cos^2 x^3}$.

Приклад 1.18. Задано функцію $y = \operatorname{tg}^7(x^3+4)$. Знайти y'_x.

Розв'язання.

$$y'_x = y' = 7\operatorname{tg}^6(x^3+4)\frac{1}{\cos^2(x^3+4)}3x^2.$$

Відповідь: $\dfrac{21x^2\operatorname{tg}^6(x^3+4)}{\cos^2(x^3+4)}$.

Приклад 1.19. Знайти похідну функції $y = \sqrt{x^2+4x+2}$.

Розв'язання. Представимо дану функцію у вигляді

$$y = \sqrt{z}, \quad z = x^2+4x+2$$

та диференціюємо

$$y'_z = (\sqrt{z})'_z = \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+2}}, \quad z'_x = (x^2+4x+2)' = 2x+4.$$

Тоді остаточно

$$y' = \frac{x+2}{2\sqrt{x^2+4x+2}}.$$

Відповідь: $\dfrac{x+2}{2\sqrt{x^2+4x+2}}$.

Приклад 1.20. Знайти похідну функції $y = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$.

Розв'язання. Диференціюємо її як частку і складну функцію

$$y' = \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos^2 x)'\sin x - (\sin x)'\cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{2\cos x(-\sin x)\sin x - \cos x\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{2\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{2\cos x}{\sin^2 x}.$$

Відповідь: $-\dfrac{2\cos x}{\sin^2 x}$.

1.7. Похідна оберненої функції

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ — пара взаємно обернених функцій, тобто областю визначення функції $\varphi(y)$ є множина значень функції $f(x)$, а множина значень $\varphi(y)$ є областю визначення $f(x)$.

Теорема 1.9. *Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на інтервалі $(a; b)$ і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ в цьому інтервалі, то існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка також має похідну $\varphi'(y)$ і*

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Теорема 1.10. *Похідні від обернених тригонометричних функцій знаходять за формулами*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

□ Функція $y = \arcsin x$, де $x \in [-1; 1]$, є оберненою до функції $x = \sin y$, де $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функція $x = \sin y$ зростає і $x'_y = \cos y > 0$. Тоді за умовою теореми про похідну оберненої функції маємо

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для функції $y = \operatorname{arctg} x$ оберненою є $x = \operatorname{tg} y$, де $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $x \in (-\infty; \infty)$, і умова **теореми 1.9** виконується ($x = \operatorname{tg} y$ зростає), $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$, $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y$. Тоді

$$(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Доведення інших співвідношень аналогічне. ■

Приклад 1.21. Знайти похідну функції $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання.

$$(\arcsin x+\sqrt{1-x^2})' = (\arcsin x)'+(\sqrt{1-x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Відповідь: $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

Приклад 1.22. Знайти похідну функції $y = \sqrt{1-x^2}\arccos x$.

Розв'язання.

$$(\sqrt{1-x^2}\arccos x)' = (\sqrt{1-x^2})'\arccos x + (\arccos x)'\sqrt{1-x^2} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} = -\left(1+\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Відповідь: $-\left(1+\dfrac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Приклад 1.23. Знайти похідну функції $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$.

Розв'язання.

$$\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)\right]' = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)' + \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+a^2)\right]' =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\left(\frac{x}{a}\right)' + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+a^2}(x^2+a^2)' = \frac{x+a}{x^2+a^2}.$$

Відповідь: $\dfrac{x+a}{x^2+a^2}$.

Приклад 1.24. Знайти похідну функції $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{2x-1}$.

Розв'язання.

$$y = (\operatorname{arcctg}\sqrt{2x-1})' = -\frac{(\sqrt{2x-1})'}{1+(\sqrt{2x-1})^2} =$$

$$= -\frac{1}{1+2x-1}\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = -\frac{1}{2x\sqrt{2x-1}}.$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$.

Приклад 1.25. Знайти похідну функції $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$.

Розв'язання.

$$y = \left(\arcsin\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

Приклад 1.26. Знайти похідну функції $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$.

Розв'язання.

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' =$$

$$= \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2}\left[\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\right] =$$

$$= -\frac{2}{2+2x^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{1+x^2}$.

1.8. Похідна функції, заданої параметрично

Нехай задані дві функції $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ однієї змінної t, які визначені на одному і тому ж проміжку. В цьому випадку говорять, що *функція задана параметрично*, а t — параметр.

Якщо $x = \varphi(t)$ строго монотонна, то вона має обернену функцію $t = \Phi(x)$ і $y = \psi[\Phi(x)]$ — складена функція. Тоді похідна складеної функції

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \psi'(t)\Phi'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Отже,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад 1.27. Знайти похідну y'_x функції

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$$

.

Розв'язання. Згідно виведеній вище формулі, маємо

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(3\sin t)'}{(2\cos t)'} = \frac{3\cos t}{-2\sin t} = -\frac{3}{2}\operatorname{ctg} x.$$

Відповідь: $-\dfrac{3}{2}\operatorname{ctg} x$.

Приклад 1.28. Скласти рівняння дотичної до циклоїди

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$$

в точці $M_0(x_0, y_0)$, яка відповідає параметру $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Знайдемо координати точки M_0:

$$\begin{cases} x_0 = (t - \sin t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2} - \sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - 1, \\ y_0 = (1 - \cos t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1 - \cos\dfrac{\pi}{2} = 1. \end{cases}$$

Знайдемо похідну в точці M_0:

$$y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin t}{1-\cos t}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Тоді рівняння дотичної має вигляд

$$y - 1 = x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right),$$

або

$$y = x + 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $y = x + 2 - \dfrac{\pi}{2}$.

1.9. Похідна неявно заданої функції

Нехай функція задана неявно у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$. Щоб диференціювати неявно задану функцію, необхідно знайти похідну обох частин рівності по x, вважаючи y складеною функцією від x. Потім із одержаного рівняння виразити y'.

Приклад 1.29. Знайти y', якщо задана функція $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Розв'язання. Згідно з правилом диференціювання неявної функції маємо

$$3x^2 + 3y^2y' - 3(x'y + y'x) = 0, \quad x^2 + y^2y' - y - y'x = 0,$$

$$x^2 - y + y'(y^2 - x) = 0.$$

Звідси

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Відповідь: $\dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$.

Приклад 1.30. Знайти x'_t, якщо $t \ln x - x \ln t = 1$.

Розв'язання. Це рівняння визначає x як неявну функцію t.

Диференціюємо за t:

$$t'_t \ln x + t\frac{1}{x}x'_t - \left(x'_t \ln t + x\frac{1}{t}\right) = 0.$$

Через те, що $t'_t = 1$,

$$\ln x + \frac{t}{x}x'_t - x'_t \ln t - \frac{x}{t} = 0, \quad x'_t\left(\frac{t}{x} - \ln t\right) - \frac{x}{t} + \ln x = 0.$$

Отже,

$$x'_t = \frac{\dfrac{x}{t} - \ln x}{\dfrac{t}{x} - \ln t} = \frac{x(x - t\ln x)}{t(t - x\ln t)}.$$

Щоб знайти x'_t при $t = 1$, необхідно визначити ще значення x, яке відповідає даному значенню t. Підставляючи $t = 1$ у вихідне рівняння, одержимо $1 \cdot \ln x - x \ln 1 = 1$, звідки $\ln x = 1$, отже $x = e$.

Підставимо значення t, x у формулу для похідної. Одержимо

$$x'_t = \frac{e(e - 1 \cdot \ln e)}{1(1 - e\ln 1)} = e(e-1).$$

Відповідь: $e(e-1)$.

1.10. Логарифмічне диференціювання. Похідна показниково-степеневої функції

При знаходженні похідної деяких функцій доцільно застосовувати логарифмування. Для диференціювання показниково-степеневої функції вигляду $y = u^v$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ логарифмування обов'язкове.

Виведемо співвідношення для похідної цієї функції. Спочатку прологарифмуємо нашу функцію $y = u^v$:

$$\ln y = \ln u^v \Longrightarrow \ln y = v \ln u.$$

Тепер знайдемо похідну неявної функції у припущені, що $y = y(x)$, $u = u(x)$ і $v = v(x)$:

$$(\ln y)' = (v \ln u)', \quad \frac{1}{y}y' = v' \ln u + v\frac{u'}{u}, \quad y' = y\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right).$$

Залишається пидставити $y = u^v$:

$$y' = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right).$$

Нарешті, $y' = u^v v' \ln u + u^{v-1} v u'$.

Приклад 1.31. Знайти y', якщо $y = x^{\sin 5x}$.

Розв'язання. Тут $u = x$; $v = \sin 5x$. Тоді безпосередньо за формулою

$$y' = x^{\sin 5x}(\sin 5x)' \ln x + x^{\sin 5x - 1} x' \sin 5x =$$

$$= 5x^{\sin 5x} \cos 5x \ln x + x^{\sin 5x - 1} \sin 5x.$$

Відповідь: $5x^{\sin 5x} \cos 5x \ln x + x^{\sin 5x - 1} \sin 5x$.

Приклад 1.32. Знайти y', якщо $y = \dfrac{x^3 e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}$.

Розв'язання. Прологарифмуємо функцію, а потім знайдемо похідну неявної функції:

$$\ln y = 3 \ln x + \ln e^x - \ln(x-1) - \ln\sqrt{3x+5};$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{3}{x} + \frac{1}{e^x}e^x - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{3x+5}}(\sqrt{3x+5})',$$

$$y' = \frac{x^3 e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}\left(\frac{3}{x} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(3x+5)}\right).$$

Відповідь: $\dfrac{x^3 e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}\left(\dfrac{3}{x} + 1 - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{2(3x+5)}\right)$.

1.11. Похідні вищих порядків

Нехай на інтервалі (a, b) задана функція $y = f(x)$. Тоді її похідна y' також є функцією від x, і вона теж може мати похідну на інтервалі (a, b) або в деякій точці $x \in (a, b)$. Цю похідну називають *другою похідною* або *похідною другого порядку.* Позначають її y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, або $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Означення 1.7. *Похідною n-го порядку функції $y = f(x)$ називають похідну від похідної $(n-1)$ порядку. Позначають її $y^{(n)} = (y^{n-1})'$ або $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}\right)$.*

Приклад 1.33. Знайти четверту похідну функції $y = x^5 - 7x^2 + x - 1$.

Розв'язання.

$$y' = 5x^4 - 14x + 1,$$

$$y'' = (y')' = (5x^4 - 14x + 1)' = 20x^3 - 14,$$

$$y''' = (y'')' = (20x^3 - 14)' = 60x^2,$$

$$y'''' = (60x^2)' = 120x.$$

Відповідь: $120x$.

Приклад 1.34. Знайти похідну n-го порядку функції $y = e^{ax}$.

Розв'язання. Похідна першого порядку: $y' = ae^{ax}$; друга похідна: $y'' = a^2e^{ax}$; $y''' = a^3e^{ax}$; $y^{(4)} = a^4e^{ax}$; ...; $y^{(n)} = a^ne^{ax}$.

Відповідь: a^ne^{ax}.

Друга похідна застосовується при дослідженні функцій і побудові графіків.

Фізичний зміст другої похідної: якщо перша похідна $S'(t) = V(t)$ — швидкість руху тіла, то другу похідну $S''(t) = V'(t) = a(t)$ можна тлумачити як прискорення.

1.12. Таблиця похідних

Зведемо всі виведені співвідношення. Вважатимемо, що $u = u(x)$, $v = v(x)$ — диференційовні функції, C — стала величина.

Правила диференціювання

1. $y = f(u),\ u = u(x),\ y'_x = y'_u u'_x;$
2. $(u^v)' = u^v v' \ln u + u^{v-1} v u';$
3. $(uv)' = u'v + v'u;$
4. $y = y(t),\ x = x(t),\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t};$
5. $(u \pm v)' = u' \pm v';$
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2};$
7. $(Cu)' = Cu';$

Таблиця похідних

1. $(C)' = 0;$
2. $(u^n)' = nu^{n-1}u',\ n \in \mathbb{R};$
3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u',\ a > 0,\ a \neq 1;$
4. $(e^u)' = e^u u';$
5. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} u';$
6. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} u';$
7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$
8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$
9. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$
10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$
11. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
12. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
13. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u';$
14. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'.$

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти похідні:

1) $y = x(2-x)^2$;

2) $y = \dfrac{3}{3x+5} - \dfrac{2}{x}$;

3) $y = \dfrac{x^3-1}{x^5+1}$;

4) $y = \left(\sin\dfrac{x}{4} - \cos\dfrac{x}{4}\right)^2$;

5) $y = (2x-1)\operatorname{ctg}(x+5)$;

6) $y = \operatorname{tg} 3x + \dfrac{3}{4}\operatorname{tg}^2 4x$;

7) $y = \left(\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right)^2$;

8) $y = \ln\left(\operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{\sin x}\right)$;

9) $y = \cos^2 3x + 3^{(1-x)}$;

10) $y\cos xy = x^2 + 3$;

11) $\ln(x^2+2y) = 2x$;

12) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin 2t; \end{cases}$

13) $y = x^{\ln x}$;

14) $y = \dfrac{(1-x^2)\cos^6 6}{\sqrt[7]{x^5}}$;

15) $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$;

16) $y = 5^{\sin x}\cos 5x$.

2. Знайти другу похідну, якщо:

1) $y = x(2-x)^2$;

2) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$;

3) $y = x^2 e^{2x}$;

4) $y = \sqrt{x} - \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{x^2}$;

5) $y = x + \sqrt{3-x}$;

6) $y = \cos^2 3x + 3^{(1-x)}$.

3. Знайти похідну n-го порядку, якщо $y = \dfrac{1}{x}$.

Домашні завдання

1. Знайти похідні:

1) $y = \dfrac{x+e^{3x}}{x-e^{3x}}$;

2) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t; \end{cases}$

4) $x^3 + y^3 = \sin(x - 2y)$;

5) $y = \arccos\sqrt{x}$;

6) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{ctg} x + 1} + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{tg} x + 1}$.

2. Знайти другу похідну, якщо

1) $y = (x^2 - 1)\ln(x - 1)$;

2) $y = \dfrac{\ln x}{x^3}$;

3) $y = x\cos x^2$;

4) $y = (3 - x^2)\ln^2 x$.

3. Знайти n-у похідну, якщо $y = e^{2x}$.

Відповіді:

1.

1) $y' = \dfrac{2e^{3x}(3x - 1)}{(x - e^{3x})^2}$;

2) $y' = -2\sin t\cos^3 t$;

3) $y' = \dfrac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}$;

4) $y' = \dfrac{\cos(x - 2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x - 2y)}$;

5) $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$;

6) $y' = \dfrac{2 + \cos 2x + \sin 2x}{(\operatorname{ctg} x + 1)^2} - \dfrac{2 - \cos 2x + \sin 2x}{(\operatorname{tg} x + 1)^2}$.

2.

1) $2\ln(x - 1) + \dfrac{2x}{x - 1} + 1$;

2) $-\dfrac{3 + 4(1 - 3\ln x)}{x^5}$;

3) $-6x\sin x^2 - 4x^3\cos x^2$;

4) $-2\ln^2 x - 4\ln x - \left(\dfrac{6}{x^2 + 2}\right)\ln x + \dfrac{6}{x^2} - 2$.

3. $y^{(n)} = 2^n e^{2x}$.

Завдання для самоперевірки

1. Вивчити таблицю похідних.
2. Чому дорівнює похідна суми функцій?
3. Чому дорівнює похідна добутку двох функцій?
4. Чому дорівнює похідна частки двох функцій?
5. Сформулювати теорему про похідну складенної функції.
6. Сформулювати теорему про похідну оберненої функції.
7. Як обчислюється похідна неявно заданної функції?
8. Що таке степенево-показникова функція? Як обчислюється її похідна?
9. Що таке логарифмічне деференцювання? Наведіть приклад.
10. Як обчислюється похідна параметрично заданної функції?
11. Що називається другою похідною функції $y = f(x)$? Який її фізичний зміст?
12. Що назівається похідною n-го порядку функції $y = f(x)$?

Розділ 2

Застосування диференціального числення

2.1. Диференціал функції та його застосування

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці $x \in [a, b]$, тобто $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Тоді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, $\alpha \to 0$, $\Delta x \to 0$ і $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$.

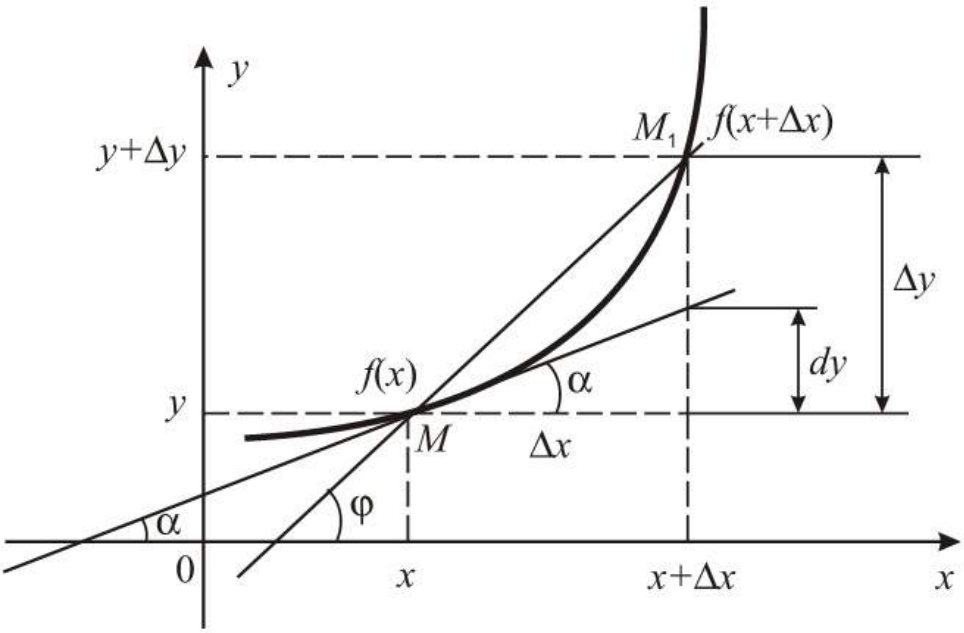


Рис. 2.1

Означення 2.1. *Диференціалом dy функції $y = f(x)$ в точці x називається головна лінійна відносно Δx частина приросту функції $f(x)$ в цій точці: $dy = f'(x)\Delta x$.*

Якщо $y = x$, то $y' = x' = 1$, тому $dy = dx = \Delta x$. Отже, можна записати $dy = f'(x)dx$.

Геометричний зміст диференціалу пояснимо на рис. 2.1.

Диференціал dy функції $f(x)$ при заданих значеннях аргументу x дорівнює приросту ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x.

Оскільки $dy \approx \Delta y$ при малих Δx, то $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ і заміна приросту функції на її диференціал геометрично означає заміну ординати точки M_1 кривої на ординату дотичної в точці M.

Така заміна доцільна лише при достатньо малих значеннях Δx.

Приклад 2.1. Обчислити наближено $\sqrt{1{,}08}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; \infty)$. Скористаємось наведеною вище формулою для наближених обчислень. При $x = 1$, $\Delta x = 0{,}08$, значення $f(1 + 0{,}08) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0{,}08$. Тоді

$$\sqrt{1{,}08} \approx \sqrt{1} + 0{,}08\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\bigg|_{x=1} = 1 + \frac{0{,}08}{2} = 1{,}04.$$

Відповідь: $\sqrt{1{,}08} \approx 1{,}04$.

Приклад 2.2. Обчислити наближено $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

Розв'язання. При $x = 1$, $\Delta x = 0{,}05$,

$$\operatorname{arctg}(1 + 0{,}05) \approx \operatorname{arctg}(1) + 0{,}05 \operatorname{arctg}'(x)\bigg|_{x=1}$$

або

$$\operatorname{arctg} 1{,}05 \approx \frac{\pi}{4} + 0{,}05\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\bigg|_{x=1} = \frac{\pi}{4} + \frac{0{,}05}{2} = 0{,}811.$$

Відповідь: $\operatorname{arctg} 1{,}05 \approx 0{,}811$.

2.2. Правило Лопіталя

Теорема 2.1. *Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовні в деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, причому*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0,$$

і в околі цієї точки $\varphi'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя відношення похідних $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує і границя відношення функцій $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ і ці границі рівні між собою, тобто

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Теорема 2.2. *Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовні в деякому околі точки x_0, і в цьому околі*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty, \quad \varphi'(x) \neq 0.$$

Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, і виконується співвідношення

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Невизначеності вигляду

$$\{0\cdot\infty\}, \quad \{\infty-\infty\}, \quad \{0^0\}, \quad \{\infty^0\}, \quad \{1^\infty\}$$

алгебраїчними перетвореннями зводяться до основних

$$\left\{\frac{0}{0}\right\} \text{ і } \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\},$$

а потім застосовується правило Лопіталя:

а) якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\varphi(x)] = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}} = \left\{\frac{0}{0}\right\};$$

б) якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$,

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - \varphi(x)] = \{\infty - \infty\} = \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{1}{\varphi(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{\varphi(x)}\dfrac{1}{f(x)}} = \left\{\frac{0}{0}\right\};$$

в) якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$, то

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} [\varphi(x)\ln f(x)]}$$

і невизначеність $\{0^0\}$ зводиться до невизначеності $\{0\cdot\infty\}$. Невизначеності $\{\infty^0\}$, $\{1^\infty\}$, розкриваються аналогічно.

Приклад 2.3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

Розв'язання. Підставивши до функцій $f(x) = \ln x$ і $\varphi(x) = x$ граничне значення аргументу x, одержимо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}.$$

Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.$

Приклад 2.4. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{2x}}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{5e^{5x}-2e^{2x}}{1}=\frac{3}{1}=3.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{x}=3.$

Приклад 2.5. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}}}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{4}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{\dfrac{\pi}{4}\left(-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{4}}\right)}=\frac{4}{\pi}.$$

В цьому прикладі спочатку звели невизначеність $\{0\cdot\infty\}$ до вигляду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, а потім застосували правило Лопіталя.

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}=\dfrac{4}{\pi}.$

Приклад 2.6. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

Розв'язання. Зведемо невизначеність $\{\infty-\infty\}$ до вигляду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, а потім застосувємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\frac{1}{\cos x}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=0.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)=0.$

Приклад 2.7. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\{1^\infty\}$. Скористаємось співвідношенням

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\ln\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}}.$$

Знайдемо значення показника:

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x=\{\infty\cdot 0\}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{2x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=-2\cdot 1\cdot 1=-2.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}.$

Завдання для аудиторної роботи

1. Записати властивості диференціала:

$$dC,\ d(Cu),\ d(u\pm v),\ d(uv),\ d\left(\frac{u}{v}\right),$$

якщо $C=const$, $u=u(x)$, $v=v(x)$.

2. Знайти диференціали функцій:

1) $y = \frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2} + 8 \arcsin \frac{x}{4}$;

2) $y = \arccos \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

3. Обчислити $\operatorname{tg} 46°$.

4. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$;

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{5x + e^x}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} (x^{-2} - \operatorname{ctg}^2 x)$;

4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}$;

5) $\lim\limits_{x \to 0} (\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

6) $\lim\limits_{x \to 0} (\ln \sin 2x)^{\operatorname{tg} 3x}$;

7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5^x - 1}{\sin x}$;

8) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\sin 4x}$;

9) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$;

10) $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

11) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} + 3x^2 - 1}{3x - \operatorname{tg}^3 x}$;

12) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos 4x}$.

Домашні завдання

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{\arcsin 2x}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x + x^3 - x^5}{4x - x^4}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{\ln(1 + 2x)}$;

4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}\right)$;

5) $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x^2}}$;

6) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}$.

Відповіді:

1) 3; 2) 0,25; 3) $\ln 2$; 4) -2; 5) $e^{0,5}$; 6) e.

Завдання для самоперевірки

1. Що називається диференціалом функції?
2. Як визначається диференціал функції через її похідну?
3. Який геометричний зміст диференціала?
4. Властивості диференціала.
5. Сформулювати правило Лопіталя для розкриття невизначеностей вигляду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ та $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.
6. Які невизначеності можна розкрити за допомогою правила Лопіталя?
7. Як розкрити невизначеності $\{0 \cdot \infty\}$, $\{\infty - \infty\}$, $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$, $\{1^\infty\}$?

2.3. Застосування диференціального числення до дослідження функцій

Дослідити функцію, задану аналітичним виразом $y = f(x)$, означає визначити такі її характеристики:

- ✓ область визначення,
- ✓ парність чи непарність,
- ✓ періодичність,
- ✓ монотонність,
- ✓ екстремуми,
- ✓ найбільше і найменше значення в заданому відрізку.
- ✓ якщо є точки розриву функції, то необхідно дослідити її поведінку поблизу цих точок.

Для графічного зображення функції необхідно додатково визначити:

✓ точки перетину графіка з осями координат;

✓ інтервали опуклості та угнутості;

✓ точки перегину;

✓ асимптоти.

2.3.1. Монотонність функції

Визначити, чи є функція зростаючою, або спадною, і знайти інтервали монотонності можна за знаком похідної.

Теорема 2.3 (**необхідна умова зростання**). *Якщо диференційована на інтервалі* $(a; b)$ *функція* $f(x)$ *зростає, то її похідна невід'ємна, тобто* $f'(x) \geq 0$ *на цьому інтервалі.*

Теорема 2.4 (**достатня умова зростання**). *Якщо функція* $f(x)$ *диференційована на інтервалі* $(a; b)$ *і* $f'(x) > 0$ *для* $a < x < b$, *то функція зростає на цьому інтервалі.*

Теорема 2.5 (**необхідна умова спадання**). *Якщо диференційована на інтервалі* $(a; b)$ *функція* $f(x)$ *спадає, то* $f'(x) \leq 0$ *на цьому інтервалі.*

Теорема 2.6 (**достатня умова спадання**). *Якщо функція* $f(x)$ *диференційована на інтервалі* $(a; b)$ *і* $f'(x) < 0$ *для* $a < x < b$, *то функція спадає на цьому інтервалі.*

Зауваження. Якщо $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на $(a; b)$, то функція $f(x)$ не спадає (не зростає).

Інтервали монотонності можуть відділятися один від одного точками, в яких $f'(x) = 0$, або точками, де похідна не існує. Ці точки називаются *критичними точками першого роду.*

Геометричний зміст теорем. Якщо на інтервалі $(a; b)$ функція $f(x)$ зростає, то дотична до кривої $y = f(x)$ в кожній точці інтервалу утворює з додатним напрямком осі Ox гострий кут. Якщо функція $f(x)$ спадає на $(a; b)$, то кут між дотичною до кривої $y = f(x)$ і додатним напрямком осі Ox — тупий.

Щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$ і визначити її поведінку на цих інтервалах, треба:

1) знайти область визначення;

2) знайти похідну;

3) знайти критичні точки I роду з рівняння $f'(x) = 0$ та за умови, що $f'(x)$ не існує;

4) розділити критичними точками область визначення функції на інтервали монотонності;

5) визначити знак похідної в кожному інтервалі монотонності: на інтервалах, де перша похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна — спадає.

Приклад 2.8. Дослідити функцію $f(x) = x^3 - 3x - 4$ на монотонність.

Розв'язання.

1) область визначення функції: $-\infty < x < +\infty$;

2) похідна: $f'(x) = (x^3 - 3x - 4)' = 3x^2 - 3$;

3) критичні точки I роду: $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1$; похідна існує на $(-\infty; +\infty)$;

4) інтервали монотонності (рис. 2.2): $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$;

5) при $x \in (-\infty; -1)$ похідна додатна: $f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 9 > 0$ — функція зростає,
при $x \in (-1; 1)$ похідна від'ємна: $f'(0) = -3 < 0$ — функція спадає,
при $x \in (1; +\infty)$ похідна додатна: $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 3 = 24 > 0$ — функція зростає.

Графічно розв'язок задачі можна показати на рис. 2.2.

Відповідь: функціи зростає при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; спадає при $x \in (-1; 1)$.

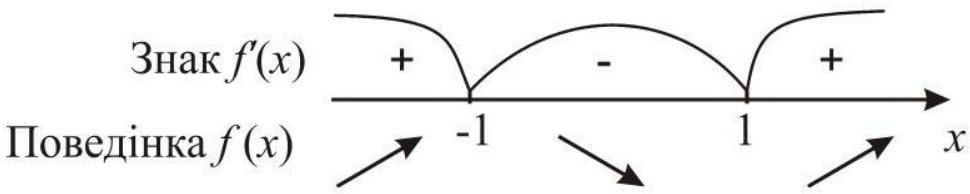


Рис. 2.2

Приклад 2.9. Знайти інтервали монотонності функції

$$f(x) = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

Розв'язання.

1) область визначення функції: $-\infty < x < +\infty$;

2) похідна: $f'(x) = \dfrac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x-2}}$;

3) критичні точки I роду: $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$; похідна не існує в точці $x_2 = 2$;

4) інтервали монотонності: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$;

5) при $x \in (-\infty; 1)$ похідна додатна — функція зростає,

при $x \in (1; 2)$ похідна від'ємна — функція спадає,

при $x \in (2; +\infty)$ похідна додатна — функція зростає.

Відповідь: функціи зростає при $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; спадає при $x \in (1; 2)$.

2.3.2. Локальний екстремум функції

Означення 2.2. *Функція $y = f(x)$ має локальний внутрішній максимум (або мінімум) в точці $x = x_0$, якщо:*

1) $f(x)$ визначена в точці x_0 в її достатньо малому «δ-околі», тобто при $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$;

2) всі значення функції з «δ-околу» менші (або більші), ніж її значення в точці x_0, тобто $f(x) < f(x_0)$ (або$f(x) > f(x_0)$).

Геометричний зміст цього зрозумілий із рис. 2.3.

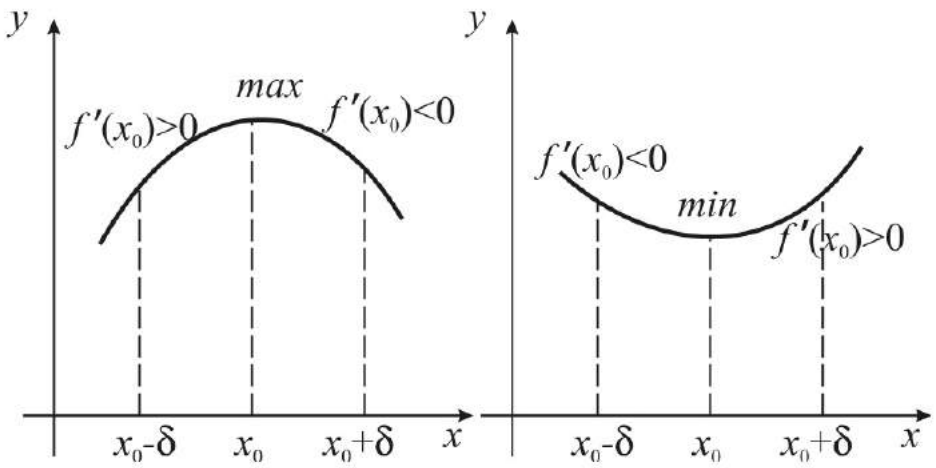


Рис. 2.3

Означення 2.3. *Максимум (мінімум) називається екстремумом функції.*

Оскільки ці поняття пов'язанні з околом точки із області її визначення, то екстремум функції може бути лише у внутрішніх точках області.

Застосування похідної до знаходження екстремуму функції базується на таких теоремах.

Теорема 2.7 (**необхідна умова екстремуму**). *Якщо диференційована функція $y = f(x)$ має екстремум в точці x_0, то її похідна в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$.*

Теорема 2.8 (**достатня умова екстремуму**). *Якщо неперервна функція $y = f(x)$ диференційована в деякому «δ-околі» критичної точки x_0 і при переході через неї (зліва направо) похідна $f'(x)$ міняє знак з «+» на «−», то x_0 є точкою максимуму; якщо знак похідної змінюється з «−» на «+», то x_0 — точка мінімуму. (див. рис. 2.3).*

Зауваження. Є такі функції, в точках екстремуму яких, похідна не існує. Наприклад, функція $f(x) = |x|$. В точці мінімуму $x = 0$ її похідна не існує (рис. 2.4).

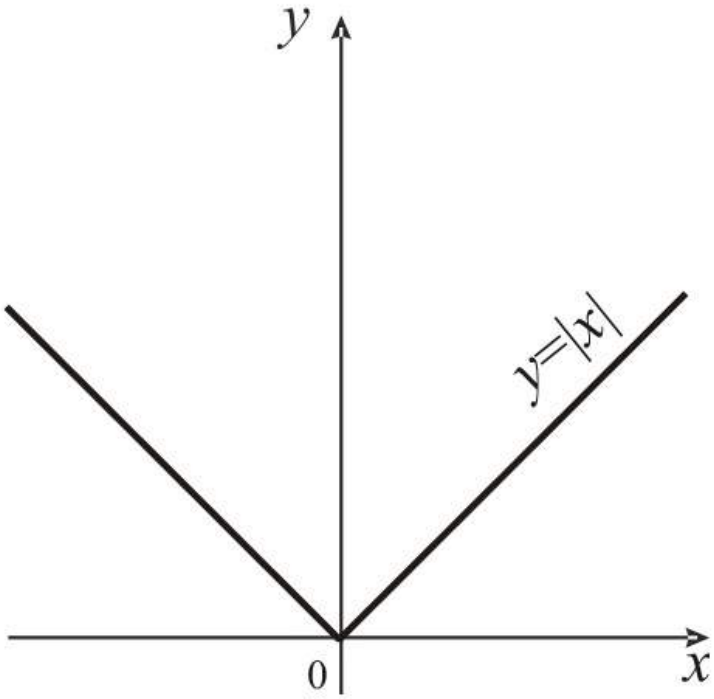


Рис. 2.4

Отже, неперервна функція може мати екстремум лише в точках, де похідна дорівнює нулю, або не існує, тобто в критичних точках.

Щоб дослідити функцію на екстремум, необхідно:

1) знайти область визначення;

2) знайти першу похідну;

3) знайти критичні точки I роду функції із рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує;

4) вибрати серед них внутрішні точки області визначення;

5) дослідити знак похідної $f'(x)$ зліва і справа від кожної критичної точки;

6) виписати ті точки, де екстремум є;

7) знайти значення функції в точках екстремуму.

Для дослідження функції на екстремум можна скористатись також поняттям другої похідної $f''(x)$.

Теорема 2.9. *Якщо в точці x_0 перша похідна $f'(x_0) = 0$, а друга похідна $f''(x_0) \neq 0$, то при $f''(x_0) < 0$ функція має в цій точці максимум, а при $f''(x_0) > 0$ — мінімум.*

Приклад 2.10. Знайти екстремуми функції $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - 3$.

Розв'язання. Область визначення функції: $-\infty < x < +\infty$.

Критичні точки I роду:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3\right)' = x^2 - 3x + 2;$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1,\; x_2 = 2.$$

Точок, де похідна не існує, немає. За першою похідною (рис. 2.5): точка $x = 1$ є точкою максимуму, а точка $x = 2$ — точкою мінімуму.

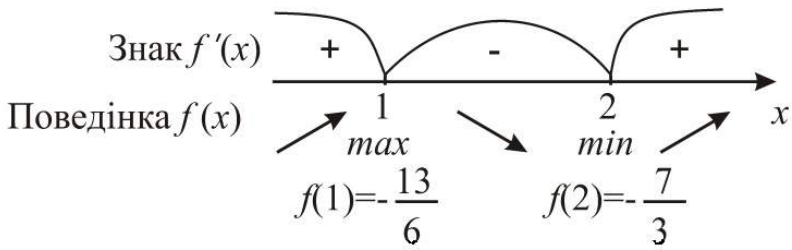


Рис. 2.5

Значення функції в цих точках:

$$f_{max} = f(1) = -\frac{13}{6}, \quad f_{min} = f(2) = -\frac{7}{3}.$$

За другою похідною: $f''(x) = 2x - 3 \;\Rightarrow\; f''(1) = -1 < 0,\; f''(2) = 1 > 0$.

Отже, в точці $x = 1$ функція дістає максимуму, а в точці $x = 2$ — мінімум.

Відповідь: $f_{max} = f(1) = -\dfrac{13}{6}, \quad f_{min} = f(2) = -\dfrac{7}{3}$.

2.3.3. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Неперервна на відрізку $[a; b]$ функція досягає своїх найбільшого і найменшого значень або у внутрішніх точках відрізку, або на його кінцях.

Алгоритм знаходження цих значень:

1) знайти критичні точки I роду функції на інтервалі $(a; b)$;

2) обчислити значення функції у знайдених критичних точках і в точках $x = a$, $x = b$, тобто на кінцях відрізку;

3) вибрати серед цих значень найбільше і найменше.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a; b)$, то слід знайти границі $\lim\limits_{x\to a+\varepsilon} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b-\varepsilon} f(x)$ при $\varepsilon \to 0$ і значення функції в критичних точках інтервалу.

Приклад 2.11. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1 \text{ на відрізку } [-2; 1].$$

Розв'язання. Знайдемо критичні точки із рівняння $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = (3x^4 + 4x^3 + 1)' = 12x^3 + 12x^2;$$

$$12x^3 + 12x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 = 0,\; x_3 = -1.$$

Точки $x = -1$ і $x = 0$ належать відрізку $[-2; 1]$, тому знаходимо значення функції в цих точках: $f(-1) = 3 - 4 + 1 = 0$, $f(0) = 1$.

Знайдемо значення функції на кінцях відрізку: $f(-2) = 48 - 32 + 1 = 17$, $f(1) = 8$.

Отже, найбільшим значенням є $f(-2) = 17$, а найменшим $f(-1) = 0$.

Відповідь: $f_{\text{найб}} = f(-2) = 17, \quad f_{\text{найм}} = f(-1) = 0.$

Задача 2.1. Визначити розміри циліндричного бака об'єму V, при яких на його виготовлення піде найменше матеріалу.

Розв'язання. Нехай радіус основи бака r, а його висота h. Тоді повна поверхня бака $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Це функція двох змінних r і h. Виразимо $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$, оскільки об'єм V заданий. Отже,

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{V}{\pi r^2}$$

або

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Знайдемо критичні точки I роду:

$$S'(r) = 0 \;\Rightarrow\; 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Знайдемо знак другої похідної на інтервалі $(0; +\infty)$:

$$S''(r) = 2\left(2\pi + \frac{2V}{r^3}\right) > 0.$$

Отже, в точці $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ функція $S(r)$ має мінімум. Тоді висота

$$h = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r.$$

Відповідь: висота бака повинна бути вдвічі більшою радіуса основи, щоб на виготовлення бака об'єму V пішло найменше матеріалу.

2.3.4. Опуклість і угнутість функції. Точки перегину

Означення 2.4. *Крива (або функція) $y = f(x)$ називається опуклою на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче її дотичної на цьому інтервалі.*

Означення 2.5. *Крива (або функція) $y = f(x)$ називається вгнутою (увігнутою) на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище її дотичної на цьому інтервалі.*

Означення 2.6. *Точкою перегину називається точка кривої, яка відділяє опуклу частину від вгнутої.*

В точці перегину дотична перетинає криву.

Інтервали опуклості і вгнутості знаходять за допомогою такої теореми.

Теорема 2.10. *Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на інтервалі $(a; b)$. Тоді:*

- *якщо $f''(x) < 0$, $x \in (a; b)$, то крива опукла на $(a; b)$;*
- *якщо $f''(x) > 0$, $x \in (a; b)$, то крива вгнута на $(a; b)$.*

Означення 2.7. *Точки, в яких друга похідна $f''(x) = 0$ або не існує, називають критичними точками II роду функції $f(x)$.*

Теорема 2.11 (**достатня умова існування точки перегину**). *Нехай x_0 — критична точка II роду. Якщо при переході через неї $f''(x)$ змінює знак, то точка $M_0(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину кривої.*

Отже, щоб знайти точки перегину, необхідно знайти критичні точки II роду із рівняннь $f''(x) = 0$, $f''(x) = \infty$ і дослідити зміну знака другої похідної при переході через ці точки.

Приклад 2.12. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину кривої $f(x) = x^5 - x + 2$.

Розв'язання. Область визначення функції: $-\infty < x < +\infty$. Оскільки $f''(x) = 20x^3$, то критична точка другого роду одна: $x = 0$. Розбиваємо область визначення на два інтервали $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ і досліджуємо знак другої похідної при переході через цю точку.

В інтервалі $(-\infty; 0)$ друга похідна $f''(x) < 0$, тому крива опукла.

В інтервалі $(0; +\infty)$ друга похідна $f''(x) > 0$, тому крива вгнута.

Отже, точка $M(0; 2)$ є точкою перегину функції.

Відповідь: функція опукла при $x \in (-\infty; 0)$; вгнута при $x \in (0; +\infty)$; $M(0; 2)$ — точка перегину.

2.3.5. Асимптоти кривої

Означення 2.8. *Пряма L називається асимптотою кривої, якщо відстань δ від змінної точки M кривої $y = f(x)$ до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M, рухаючись по кривій, віддаляється в нескінченність.*

Розрізняють асимптоти вертикальні і невертикальні (горизонтальні і похилі).

Для існування вертикальної асимптоти $x = x_0$ необхідно і достатньо, щоб границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, тобто в точках розриву функції завжди є вертикальна асимптота.

Рівняння похилої асимптоти має вигляд $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx].$$

Асимптоти при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$ можуть бути різні. Якщо хоча б одна із цих границь не існує або дорівнює нескінченності, то крива похилої асимптоти не має.

Якщо $k = 0$, то $y = b$ — рівняння горизонтальної асимптоти.

Приклад 2.13. Знайти асимптоти кривої $y = \dfrac{2x^2 + 5x - 1}{x}$.

Розв'язання. 1. Шукаємо вертикальні асимптоти. Функція $f(x)$ не визначенна в точці $x = 0$ і

$$\lim_{x \to 0-\varepsilon} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0+\varepsilon} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x} = -\infty.$$

Отже, $x = 0$ — вертикальна асимптота кривої.

2. Шукаємо інші асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^2} = 2,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 + 5x - 1}{x} - 2x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{5x - 1}{x} \right) = 5.$$

Пряма $y = 2x + 5$ є похила асимптота кривої.

Відповідь: $x = 0$ — вертикальна асимптота кривої; $y = 2x + 5$ — похила асимптота кривої.

Приклад 2.14. Знайти асимптоти кривої $f(x) = xe^x$.

Розв'язання. Вертикальних асимптот ця крива не має, тому що вона не має точок розриву.

Для невертикальних асимптот

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$$

тому асимптоти при $x \to +\infty$ немає.

При $x \to -\infty$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (xe^x - 0 \cdot x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{e^{-x}} = 0,$$

тобто крива має горизонтальну асимптоту $y = 0$.

Відповідь: $y = 0$ — горизонтальна асимптота кривої.

2.3.6. Схема дослідження функції та побудова її графіка

1. Знайти область визначення функції.
2. Виявити, чи є функція парною або непарною, чи періодичною.
3. Знайти точки перетину графіка з осями координат, якщо вони є.
4. Дослідити поведінку функції в точках розриву, якщо вони є.
5. Знайти інтервали монотонності і визначити поведінку функції в них.
6. Знайти точки екстремуму і значення функції в них.
7. Знайти точки перегину та інтервали опуклості (вгнутості).
8. Знайти рівняння асимптот графіка функції (якщо вони є).
9. За результатами дослідження функції побудувати її графік.

Приклад 2.15. Дослідити функцію $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Функція не визначена в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Область її визначення складається з трьох інтервалів $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$, а графік — з трьох гілок.

2. Функція непарна, тому що

$$y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x).$$

Отже, графік її симетричний відносно початку координат і достатньо побудувати його в частині, наприклад, $x \geq 0$.

Функція неперіодична.

3. Точки перетину графіка з осями координат: при $x = 0$, $y = 0$, тобто графік перетинає вісі координат в точці $O(0; 0)$.

4. Дослідимо поведінку функції в точках розриву $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$ та при $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to -1-\varepsilon} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1-\varepsilon}{1-(-1-\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1-\varepsilon}{-2\varepsilon-\varepsilon^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -1+\varepsilon} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1+\varepsilon}{1-(-1+\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1+\varepsilon}{2\varepsilon-\varepsilon^2} = -\infty,$$

отже, $x = -1$ — точка розриву другого роду, через неї проходить вертикальна асимптота;

$$\lim_{x\to 1-\varepsilon} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\varepsilon}{1-(1-\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon-\varepsilon^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+\varepsilon} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1+\varepsilon}{1-(1+\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1+\varepsilon}{-2\varepsilon-\varepsilon^2} = -\infty,$$

отже, $x = 1$ — точка розриву другого роду, через неї проходить вертикальна асимптота;

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{1-x^2} = +0, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{1-x^2} = -0.$$

5. Знайдемо інтервали монотонності функції.

Критичні точки I роду:

$$y' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2},$$

$$\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -1,\; x_2 = 1.$$

Тоді інтервали монотонності і поведінка функції на цих інтервалах:

- $x \in (-\infty; -1)$ перша похідна $y' > 0$ — функція зростає;
- $x \in (-1; 0)$ перша похідна $y' > 0$ — функція зростає;
- $x \in (0; 1)$ перша похідна $y' > 0$ — функція зростає;
- $x \in (1; +\infty)$ перша похідна $y' > 0$ — функція зростає.

6. Дослідимо функцію на екстремум.

Оскільки перша похідна не змінює знак при переході через критичні точки, то функція не має точок екстремуму.

7. Дослідимо функцію на опуклість. Знайдемо спочатку другу похідну:

$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{2x(1-x^2)^2 - 2(1-x^2)(-2x)(x^2+1)}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Точки перегину графіка знайдемо серед тих, де друга похідна дорівнює нулю або не існує. Це точки $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, тоді

- $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$ друга похідна $y'' > 0$ — функція вгнута;
- $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$ друга похідна $y'' < 0$ — функція опукла.

8. Знайдемо асимптоти графіка функції.

Оскільки точки $x = -1$ і $x = 1$ є точками розриву фукнції, то прямі $x = -1$ і $x = 1$ є вертикальними асимптотами.

Знайдемо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0;\ b = \lim_{x\to\pm\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Отже, пряма $y = 0$ (вісь Ox) є горизонтальною асимптотою при $x \to \pm\infty$.

9. За даними дослідження складаємо таблицю і будуємо графік (рис. 2.6).

інтервали	$-\infty$	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$	$+\infty$
знак y'		+	не існує	+	0	+	не існує	+	
повед. $y(x)$		↗		↗		↗		↗	
y''		+		–	0	+		–	
повед. $y(x)$	$\lim y = 0$	∪		∩	точка перетину $y = 0$	∩		∩	$\lim y = 0$

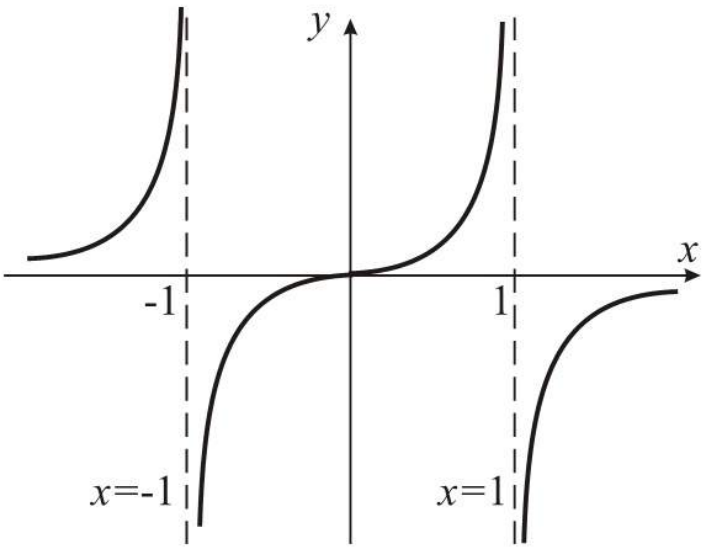


Рис. 2.6

Завдання для аудиторної роботи

1. Показати, що функція $y = 4 - 3x - x^3$ скрізь спадає.

2. Знайти інтервали монотонності функції $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

3. Знайти екстремуми та інтервали монотонності функцій:

а) $y = x^3 - 3x + 5$, б) $y = x - \ln(x+2)$, в) $y = x^2 e^{-2x}$.

4. Знайти найбільше і найменше значення функцій на інтервалі:

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $x \in [-4; 0]$;

б) $y = x + \dfrac{4}{x^2}$, $x \in [1; 3]$;

в) $y = \sin 2x - x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

5. Знайти точки перегину, інтервали опуклості графіка функції:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 6x$, б) $y = \ln(x^2 + 4)$, в) $y = (x+1)e^{x+1}$.

6. Знайти асимптоти ліній:

а) $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$, б) $y = 2 + \ln\dfrac{x+1}{x-2}$, в) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

7. Дослідити функцію і побудувати її графік:

а) $y = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$, б) $y = \dfrac{x^2}{2} + \ln x$.

Домашні завдання

1. Знайти інтервали монотонності функцій:

а) $y = \ln(x^2 + 3)$, б) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Відповіді:

а) функція спадає в інтервалі $(-\infty; 0)$ і зростає в інтервалі $(0; +\infty)$;

б) функція зростає в інтервалі $(-1; 1)$ і спадає в інтервалі $(-\infty; -1)$ та $(1; +\infty)$.

2. Знайти локальні екстремуми функції: $\dfrac{(x-2)(3-x)}{x^2}$.

Відповідь: $y_{max} = y\left(\dfrac{12}{5}\right) = \dfrac{1}{24}$.

3. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 3x - x^3$, якщо $x \in [-2; 3]$.

Відповідь: $(-18; 2)$.

4. Знайти асимптоти кривої $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.
Відповідь: $x = 2,\ y = x + 1$ при $x \to +\infty$ і $y = -x - 1$ при $x \to -\infty$.
5. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$ і побудувати графік.
Відповідь: $y_{min} = y(2) = 3$; $x = 0$ і $y = x$ — асимптоти (рис. 2.7).

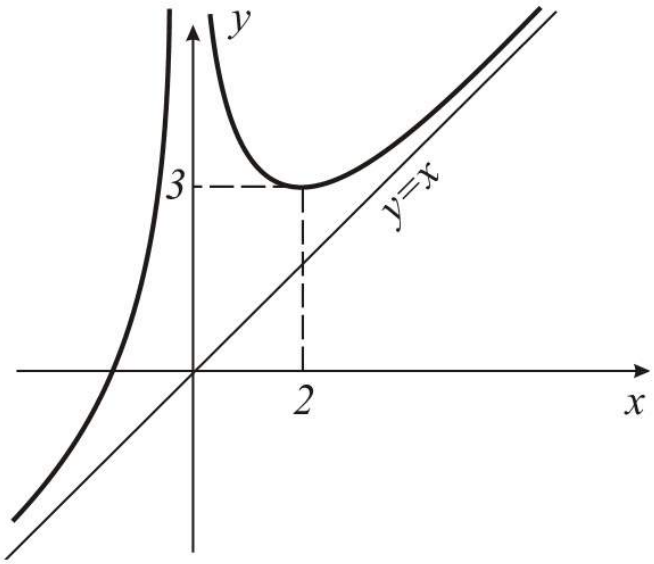


Рис. 2.7

Завдання для самоперевірки

1. У чому полягає правило знаходження інтервалів монотонності?
2. Що називається локальним мінімумом функції? Чому локальним?
3. Що називається локальним екстремумом і чим він відрізняється від абсолютного екстремуму?
4. Що називається екстремумом?
5. Сформулювати необхідні умови екстремуму.
6. Сформулювати достатні умови екстремуму.
7. Правила знаходження екстремуму. Навести приклади.

8. Які точки називаються критичними I роду?
9. Як знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку?
10. Яка крива називається опуклою (вгнутою) на інтервалі?
11. Що називається точкою перегину?
12. Які точки називаються критичними II роду?
13. Сформулювати достатню умову опуклості (вгнутості) кривої. Навести приклади.
14. Яка достатня умова того, що критична точка II роду є абсцисою точки перегину? Навести приклад.
15. Сформулювати правило знаходження інтервалів опуклості, вгнутості та точок перегину.
16. Що називається асимптотою кривої?
17. Як знайти вертикальну асимптоту?
18. Як знайти невертикальні асимптоти?
19. Записати загальну схему дослідження функції.

Індивідуальні домашні завдання

У наведених нижче варіантах виконати наступне:

1. Знайти похідну функції за означенням.
2. Знайти похідну функції, застосовуючи правила диференціювання суми, добутку, частки функцій.
3. Знайти похідну складеної функції.
4. Знайти похідну функції $y = u^v$ із застосуванням логарифмічного диференціювання.
5. Знайти похідну функції, заданої параметрично.
6. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$.
7. Знайти границі функцій із застосуванням правила Лопіталя.
8. Дослідити функцію на екстремум та знайти інтервали її монотонності.
9. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку.
10. Дослідити функцію та побудувати її графік.

Варіант 1

1.	$y=\ln x$
2.	$y=x^3-\frac{1}{5}x^2+2x-4$; $y=5\operatorname{arctg}x\cdot\ln x$; $y=\frac{1+x^8}{\arccos x}$.
3.	$y=5+3e^{x^2}\operatorname{arctg}4x$; $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$.
4.	$y=(\cos 2x)^{\ln\cos 2x}$
5.	$\begin{cases} x=\frac{3t^2+1}{3t^2}; \\ y=\sin\left(\frac{t^3}{3}+t\right). \end{cases}$
6.	$y=x\ln x$; $x_0=1$; $y_0=0$.
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\arcsin 2x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.
8.	$y=2x^3-9x^2+12$.
9.	$y=2x^3+3x^2-12x+1$; $[4;0]$.
10.	$y=\frac{x}{2}-\frac{4}{x^2}$.

Варіант 2

1.	$y=\sin 2x$.
2.	$y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$; $y=\sin 5\cdot\cos x$; $y=\frac{x^2+4}{x+1}$.
3.	$y=10^{5x^2}\arcsin\sqrt{x}+1$; $y=2x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{4x}}\right)-e^{2x}\arcsin\left(e^{2x}\right)$.
4.	$y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln\sin\sqrt{x}}$.
5.	$\begin{cases} x=\cos 2t; \\ y=\frac{2}{\cos^2 t}. \end{cases}$
6.	$y=x^3$; $x_0=-2$; $y_0=-8$.
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x^3-x^5}{4x-x^4}$; $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.
8.	$y=2x^3+3x^2-36x+5$.
9.	$y=x-4\sqrt{x}+1$; $[1;9]$.
10.	$y=\frac{x^2}{1-x^2}$.

Варіант 3

1.	$y=\frac{2}{x}$.
2.	$y=x\sqrt[4]{x}+3\sin 1$; $y=\operatorname{tg}x\cdot e^{x}$; $y=\frac{\arcsin x}{\arccos x}$.
3.	$y=\sqrt[5]{x^3}+5\operatorname{arctg}\frac{x}{5}\cdot\lg x$; $y=\left(2x^2+5\right)\sqrt{x^2+1}+3\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.
4.	$y=(\sin x)^{5e^x}$.
5.	$\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}; \\ y=\frac{1}{t}. \end{cases}$
6.	$y=2x-x^2$; $x_0=0$; $y_0=0$.
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-1}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x^2}$.
8.	$y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.
9.	$y=3x^4+4x^3-12x^2+1$; $[-1;2]$.
10.	$y=x+\frac{1}{x}$.

Варіант 4

1.	$y=\cos 2x$.
2.	$y=6x^7+4x^3-\frac{1}{8}x$; $y=\sqrt{x}\operatorname{arctg}x$; $y=\frac{x}{\ln x}$.
3.	$y=10+\cos^4\frac{x}{2}\cdot 4^{\cos\frac{x}{2}}$; $y=x^4\arcsin\frac{x}{3}+\left(x^2+18\right)\sqrt{x^2-9}$.
4.	$y=(\arcsin x)^{e^x}$.
5.	$\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}; \\ y=\operatorname{tg}\sqrt{1+t}. \end{cases}$
6.	$y=2x-x^2$; $x_0=2$; $y_0=0$.
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{5^x-4^x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.
8.	$y=(x-3)\sqrt{x}$.
9.	$y=x+\frac{4}{x^2}$; $[1;3]$.
10.	$y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$.

Варіант 5

1.	$y = 5x - 2$.
2.	$y = \sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3}$; $y = x^3 \arcsin x$; $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.
3.	$y = \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{8} \cdot e^{\operatorname{tg} 3x}$; $y = x^3 \arcsin x + \dfrac{x^2 + 2}{3}\sqrt{1 - x^2}$.
4.	$y = (\ln 5x)^{\sqrt{x}}$.
5.	$\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}; \\ y = (t-1)^{-\frac{2}{3}}. \end{cases}$
6.	$y = x - \dfrac{1}{x}$; $x_0 = 1$; $y_0 = 0$.
7.	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} + 3x^2 - 1}{3x - \operatorname{tg}^3 x}$; $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.
8.	$y = x^3 + 3x^2 - 5$.
9.	$y = \sin 2x - x$; $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
10.	$y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

Варіант 6

1.	$y = 3x^2$.
2.	$y = -10 \operatorname{arctg} x - 7e^x$; $y = 2^x \operatorname{arctg} x$; $y = \dfrac{e^x}{\sin x}$.
3.	$y = 3 + \operatorname{tg}^2 x \cdot \ln(\sin x)$; $y = \sqrt{1 + x^2} \cdot \operatorname{arctg} x - \ln\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$.
4.	$y = x^{\operatorname{tg}^2 x}$.
5.	$\begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$
6.	$y = x - \dfrac{1}{x}$; $x_0 = -1$; $y_0 = 0$.
7.	$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^{\frac{\pi}{2} - x}$.
8.	$y = \sqrt[3]{x} + 3$.
9.	$y = \sqrt{21 + 4x - x^2}$; $[-1; 7]$.
10.	$y = \dfrac{3x - 2}{5x^2}$.

Варіант 7

1.	$y = x^2 + 2x + 1$.
2.	$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \sqrt{7}x$; $y = x^2 \cos x$; $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x^5}$.
3.	$y = \sin^3 \frac{x}{3} \cdot e^{\operatorname{tg} 3x}$; $y = 2\arcsin \frac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2 + 24x + 12}$.
4.	$y = (\operatorname{tg} 7x)^{e^{4x}}$.
5.	$\begin{cases} x = \sin^2 t; \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$
6.	$y = x^3$; $x_0 = 2$; $y_0 = 8$.
7.	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{\ln(1+2x)}$; $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
8.	$y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.
9.	$y = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x + 5}$; $[-1;3]$.
10.	$y = \frac{2x^2}{1 + x^2}$.

Варіант 8

1.	$y = \ln 2x$.
2.	$y = \sqrt{x} - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2}$; $y = \left(2x^2 - x - 1\right)\arccos x$; $y = \frac{\log_6 x}{x^2}$.
3.	$y = 4 - \arccos^3 x \cdot 10^{\sin x}$; $y = 3x - \ln\left(1 + \sqrt{1 - e^{6x}}\right) - e^{-3x} \arcsin e^{3x}$.
4.	$y = x^{\arcsin \sqrt{x}}$.
5.	$\begin{cases} x = \arcsin\left(t^2\right); \\ y = \arccos t^3. \end{cases}$
6.	$y = x^3$; $x_0 = 1$; $y_0 = 1$.
7.	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}$; $\lim\limits_{x \to 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.
8.	$y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$.
9.	$y = \frac{x}{1 + x^2}$; $[0;2]$.
10.	$y = \frac{(x+1)^3}{4(x-2)^2}$.

Варіант 9

1.	$y=\sin 3x$.
2.	$y=\arccos x-3\ln x$; $y=\frac{1}{3}x^3\sin x$; $y=\frac{\operatorname{ctg} x}{x+1}$.
3.	$y=\operatorname{tg}^6 x\cdot e^{10x}-2$; $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.
4.	$y=\left(\operatorname{tg}^2 x\right)^{4\ln x}$.
5.	$\begin{cases} x=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right); \\ y=\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$
6.	$y=\operatorname{tg} 2x$; $x_0=0$; $y_0=0$.
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{4}{x}}$.
8.	$y=\frac{3}{4}x^4-2x^3-\frac{3}{2}x^2+6x-1$.
9.	$y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$; $[0;1]$.
10.	$y=\frac{x}{e^x}$.

Варіант 10

1.	$y=\frac{5}{x}$.
2.	$y=5\cdot 2^x+\frac{3}{4}\operatorname{ctg} x$; $y=(\sin x-\cos x)^2$; $y=\frac{1+\cos x}{1+x^6}$.
3.	$y=5+\lg\sqrt{x}\cdot e^{4x}$; $y=\ln\frac{1+2\sqrt{-x-x^2}}{2x+1}+\frac{4}{2x+1}\sqrt{-x-x^2}$.
4.	$y=\left(\cos^2 5x\right)^{e^x}$.
5.	$\begin{cases} x=t+\sin t; \\ y=2-\cos t. \end{cases}$
6.	$y=\ln x$; $x_0=1$; $y_0=0$.
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)^{x^2-1}$.
8.	$y=2x^3-3x^2$.
9.	$y=x^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$; $[-2;2]$.
10.	$y=\frac{x}{\left(1-x^2\right)^2}$.

Варіант 11

1.	$y = x - 2$.
2.	$y = \frac{9}{\sqrt[3]{x^2}} - 5^x$; $y = 4\left(\sin x - x^2\right)\cos x$; $y = \frac{4 - x^2}{4\operatorname{arctg} x}$.
3.	$y = 10 - (\arcsin x)^2 \sqrt{e^x - 1}$; $y = \sqrt{(4+x)(1+x)} + 3\ln\left(\sqrt{4+x} + \sqrt{1+x}\right)$.
4.	$y = (\sin x)^x$.
5.	$\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}; \\ y = \arcsin(t-1). \end{cases}$
6.	$y = \frac{2}{x}$; $x_0 = 2$; $y_0 = 1$.
7.	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} + 2x^3 - \cos 2x}{x^2 - \sin^3 x}$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}$.
8.	$y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.
9.	$y = x^3(8 - x)$; $[0;7]$.
10.	$y = \frac{x^2}{2(x-1)}$.

Варіант 12

1.	$y = \cos 3x$.
2.	$y = \sqrt[5]{x^3} + 5\arcsin x$; $y = 4\left(\sin x - x^2\right)\cos x$; $y = \frac{2x - 1}{\operatorname{ctg} x}$.
3.	$y = \ln^4 x \cdot \arcsin\sqrt{x}$; $y = \ln\frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x}$.
4.	$y = (\sin x)^{\sin x}$.
5.	$\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt{1 - t}. \end{cases}$
6.	$y = 2x^2$; $x_0 = 1$; $y_0 = 2$.
7.	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{\sin^2 2x}$; $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x + 2^x\right)^{\frac{1}{x}}$.
8.	$y = 4x - \frac{x^3}{3}$.
9.	$y = \frac{4 - x^2}{4 + x^2}$; $[-1;3]$.
10.	$y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

Варіант 13

1.	$y=5x^2$.
2.	$y=5\sin x+\frac{3}{4}\ln x$; $y=4\left(\sin x-x^2\right)\cos x$; $y=\frac{\arccos x}{1+\sqrt{x}}$.
3.	$y=1+\sin^5 x\cdot \mathrm{tg}10x$; $y=5x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{10x}}\right)-e^{-5x}\arcsin\left(e^{5x}\right)$.
4.	$y=(x-5)^{\sin^2 x}$.
5.	$\begin{cases} x=\mathrm{ctg}\left(e^t\right); \\ y=\ln\left(e^t\right). \end{cases}$
6.	$y=x^2-x-2$; $x_0=2$; $y_0=0$.
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{5x-\mathrm{tg}5x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.
8.	$y=2x^3-3x^2+1$.
9.	$y=x-\sin x$; $[0;2\pi]$.
10.	$y=\frac{2x}{x^3-8}$.

Варіант 14

1.	$y=2x^2+3x+2$.
2.	$y=2x^5-\frac{1}{x}+3\mathrm{tg}\,x$; $y=2x\cos x+x^2\sin x$; $y=\frac{x}{\mathrm{tg}\,x}$.
3.	$y=5^{\cos x}\mathrm{ctg}^2 x$; $y=\ln\frac{x^4-x^2+1}{x^2+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.
4.	$y=\left(x^3+4\right)^{\mathrm{tg}\,x}$.
5.	$\begin{cases} x=\frac{2}{t}; \\ y=\sin 2t. \end{cases}$
6.	$y=x^2-x-2$; $x_0=-1$; $y_0=0$.
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\sin 2x^2\right)}{\ln\left(\sin x^2\right)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
8.	$y=x^3-12x$.
9.	$y=2x-\cos 4x$; $[-\pi;\pi]$.
10.	$y=\frac{1}{x}+4x^2$.

Варіант 15

1.	$y=\ln 3x$.
2.	$y=\frac{7}{\sqrt{x}}-e^{x}$; $y=3+\operatorname{tg}x\cdot\ln x$; $y=\frac{e^{x}}{\arcsin x}$.
3.	$y=20+\arcsin\sqrt{x}\cdot e^{\sin 10x}$; $y=\arcsin\frac{x^2-16}{x^2+16}+(x-1)\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}$.
4.	$y=x^{\sin x^2}$.
5.	$\begin{cases} x=\sin t; \\ y=\frac{1}{\cos t}. \end{cases}$
6.	$y=x^2-x-2$; $x_0=1$; $y_0=-2$.
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)^{\cos^2 x}$.
8.	$y=x^3-3x+5$.
9.	$y=4x-2\sin 4x$; $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
10.	$y=\frac{2x}{\sqrt{x-1}}$.

Варіант 16

1.	$y=\sin 4x$.
2.	$y=3\arcsin x+5\operatorname{ctg}x$; $y=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$; $y=\frac{x^3-1}{x^3+1}$.
3.	$y=\ln(\sin x)\cdot e^{\cos^2 x}+10$ $y=\left(3x^2+2\right)\sqrt{x^2-12x}+(x-1)^4\arcsin\frac{1}{x-2}$.
4.	$y=\left(x^4+5\right)^{\operatorname{ctg}x}$.
5.	$\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\left(e^t\right); \\ y=\sqrt{e^t+1}. \end{cases}$
6.	$y=x^3-3x^2-x+5$; $x_0=3$; $y_0=2$.
7.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{10}-2x+1}{x^{20}-4x+3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{2}{1-x^2}}$.
8.	$y=x-\ln(x+2)$.
9.	$y=\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$; $[-3;2]$.
10.	$y=\frac{x^3}{x^2-1}$.

Варіант 17

1.	$y=\frac{4}{x}$.
2.	$y=\frac{x^2}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{\sqrt{x}}{x}$; $y=\left(\sqrt{x}+1\right)\arcsin x$; $y=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{(2-x)^2}$.
3.	$y=2-\operatorname{arctg}e^x\cdot\cos^4 x$; $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\frac{x-1}{x^2-2x+3}$.
4.	$y=(\sin 10x)^{5x}$.
5.	$\begin{cases} x=\operatorname{ctg}t; \\ y=\frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$
6.	$y=x^3-3x^2-x+5$; $x_0=0$; $y_0=5$.
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+5^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.
8.	$y=3x^2-x^3-1$.
9.	$y=5-4x$; $[-1;1]$.
10.	$y=\frac{5x}{x^2-4}$.

Варіант 18

1.	$y=3x-8$.
2.	$y=\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}-\frac{\sqrt[4]{x}}{3}$; $y=x^3\log_2 x$; $y=\frac{3}{3x+5}-\frac{2}{x}$.
3.	$y=3+\arccos\sqrt{x}\cdot\operatorname{tg}^3 x$; $y=\ln\left(e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1}\right)+\arcsin\left(e^{-5x}\right)$.
4.	$y=\left(x^2+1\right)^{\cos^2 x}$.
5.	$\begin{cases} x=\operatorname{tg}t; \\ y=\frac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$
6.	$y=x^3-3x^2-x+5$; $x_0=1$; $y_0=2$.
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x-x}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{tg}10x}\right)^{\frac{2}{x^2}}$.
8.	$y=xe^{2x}$.
9.	$y=\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}$; $[0;3]$.
10.	$y=\frac{x^2-4}{2x+1}$.

Варіант 19

1.	$y=\cos 4x$.
2.	$y=x^5\left(x^3-5\right)$; $y=3x^2\sin x$; $y=\frac{x^5}{x^3-5}$.
3.	$y=8+\lg 5x\cdot 5^{\ln^2 x}$; $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2+1}+1}$.
4.	$y=x^{3x}$.
5.	$\begin{cases} x=\sqrt{t-1}; \\ y=\frac{t}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$
6.	$y=\frac{2}{x}$; $x_0=1$; $y_0=2$.
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(2-\sin\frac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{4-x^2}}$.
8.	$y=x^2e^{-2x}$.
9.	$y=\left(2+x^2\right)e^{-x^2}$.
10.	$y=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

Варіант 20

1.	$y=2x^2$.
2.	$y=\frac{x^7}{7}-\frac{2x^6}{3}+3x-5$ $y=2^x\arccos x$ $y=\frac{x^2+4x+5}{e^x}$.
3.	$y=\operatorname{tg}^3 x\cdot\sqrt{\sin 2x}+7$ $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.
4.	$y=\left(x^2+1\right)^{\sqrt{\cos x}}$.
5.	$\begin{cases} x=\ln\frac{1-t}{1+t}; \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$
6.	$y=\frac{4}{x}$; $x_0=1$; $y_0=4$.
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{\sin^3 x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.
8.	$y=x^2-4\ln(1+x)$.
9.	$y=\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$; $[-1;2]$.
10.	$y=\frac{x^2-2x}{x-1}$.

Варіант 21

1.	$y = x^2 + 5x + 2$.
2.	$y = \frac{1}{5} \cdot 3^x - \sin x - \cos\frac{\pi}{9}$; $y = x^2 \arccos x$; $y = \frac{3^x}{x^2 + 3x + 1}$.
3.	$y = 3 - \operatorname{ctg}\sqrt[3]{x} \cdot 2^{10x^2}$; $y = \frac{2x-1}{4x^2 - 4x + 3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{2}}$.
4.	$y = (\sin x)^{e^{x^2}}$.
5.	$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}; \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$
6.	$y = \frac{4}{x}$; $x_0 = 4$; $y_0 = 1$.
7.	$\lim\limits_{x \to 2} \frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(x-2)}$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$.
8.	$y = x^2 e^x$.
9.	$y = x\sqrt{x+3}$; $[-2.8; 1]$.
10.	$y = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$.

Варіант 22

1.	$y = \ln 4x$.
2.	$y = \sqrt[3]{x^2}(2-x)^2$; $y = (x^3 - 2)\operatorname{tg} x$; $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\cos x}$.
3.	$y = \ln 3 + \arcsin\sqrt{x} \cdot e^{\cos x}$; $y = \arcsin e^{-4x} + \ln\left(e^{4x} + \sqrt{e^{8x} - 1}\right)$.
4.	$y = \left(2x^2 - 1\right)^{\operatorname{arctg} x}$.
5.	$\begin{cases} x = 1 + 2\cos t; \\ y = \sin t. \end{cases}$
6.	$y = \frac{4}{x}$; $x_0 = 2$; $y_0 = 2$.
7.	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\log_2 x}{2^x}$; $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 4x)^{\frac{2}{x^2 - 1}}$.
8.	$y = x^2 e^{-x}$.
9.	$y = x^2 + \frac{2}{x}$; $[0.5; 3]$.
10.	$y = x - e^{\frac{1}{x-1}}$.

Варіант 23

1.	$y=\sin 5x$.	
2.	$y=\frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2}+\operatorname{arctg}x$ $\quad y=(x\sin x+\cos x)\ln x$	$y=\frac{\left(\frac{2}{x}\right)^3}{\left(\frac{x}{3}\right)^2}$
3.	$y=7-\lg 10x\cdot\sqrt{\cos x}$ $\quad y=x^3\arccos x-\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$	
4.	$y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^x}$.	
5.	$\begin{cases} x=\sqrt{t^3+1}; \\ y=\ln t. \end{cases}$	
6.	$y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; $x_0=4$; $y_0=-3$.	
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x}{5x^3+x^2-7x+3}$; $\quad \lim\limits_{x\to 0}(\ln\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}$.	
8.	$y=\frac{x^2}{x-1}$.	
9.	$y=xe^{2x-1}$; $[-1;1]$.	
10.	$y=(x+1)^2+\frac{2}{x+1}$.	

Варіант 24

1.	$y=\frac{6}{x}$.	
2.	$y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+5x^2+2$ $\quad y=\sqrt[5]{x}\arccos x-x^2\ln x$	$y=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{2}{x}\right)^3}$
3.	$y=\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\cdot 5^{x^2}$ $\quad y=\ln\left(e^{3x}+\sqrt{e^{6x}-1}\right)+\arcsin\left(e^{-3x}\right)$	
4.	$y=(\operatorname{tg}4x)^{\operatorname{ctg}4x}$.	
5.	$\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{1-t^2}; \\ y=(\arccos t)^2. \end{cases}$	
6.	$y=\frac{x^3+2}{x^3-2}$; $x_0=2$; $y_0=\frac{5}{3}$.	
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$; $\quad \lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.	
8.	$y=\ln x-2\frac{x-1}{x+1}$.	
9.	$y=\operatorname{arctg}x^2$ $[0;1]$.	
10.	$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.	

Варіант 25

1.	$y = 7x + 5$.
2.	$y = 2e^x + \operatorname{ctg} x - 2x + 3$; $y = \arcsin x \cdot \arccos x$; $y = \dfrac{x^3 \operatorname{tg} x}{10^x}$.
3.	$y = 5 + \cos(\ln x) e^{\lg 10x}$; $y = \arcsin \dfrac{1}{2x+3} + 2\sqrt{x^2 + 3x + 2}$.
4.	$y = (\cos 10x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.
5.	$\begin{cases} x = \sqrt{t-1}; \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$
6.	$y = \dfrac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$; $x_0 = 1$; $y_0 = 1$.
7.	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{5}{2 + \sqrt{9 + x}} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$.
8.	$y = x^2 \ln x$.
9.	$y = \ln\left(x^2 + 2x + 2\right)$; $[-2; 0]$.
10.	$y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Варіант 26

1.	$y = \cos 4x$.
2.	$y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$; $y = x \ln x + \sin x (1 + \cos x)$; $y = \dfrac{x^4 - x}{3 \operatorname{tg} x - 1}$.
3.	$y = 4 \operatorname{ctg}^2 x \cdot 5^{x^2}$ $y = \dfrac{1}{x}\sqrt{1 - 4x^2} + \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}$
4.	$y = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$.
5.	$\begin{cases} x = 1 + \cos^2 t; \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$
6.	$y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; $x_0 = -2$; $y_0 = -\dfrac{2}{5}$.
7.	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$; $\lim\limits_{x \to 0} (\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.
8.	$y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$.
9.	$y = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$; $[-1; 3]$.
10.	$y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

Варіант 27

1.	$y=2x^3$.		
2.	$y=\frac{x^2}{4}+\frac{4}{x^2}$	$y=e^x\sin x+x\operatorname{tg}x$	$y=\frac{-10\operatorname{arctg}x}{7e^x}$
3.	$y=12+e^{\sin x}\cdot\operatorname{ctg}4x$;	$y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$.	
4.	$y=(\operatorname{arctg}x)^{\operatorname{arctg}x}$.		
5.	$\begin{cases} x=\cos^2 t; \\ y=\operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$		
6.	$y=\frac{x}{x^2+1}$; $x_0=1$; $y_0=\frac{1}{2}$.		
7.	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-3x-10}{x^3-125}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x}{\pi}-\operatorname{ctg}x\right)^{\ln\operatorname{tg}x}$	
8.	$y=\ln\left(x^2+x+1\right)-\ln\frac{3}{4}$.		
9.	$y=x^3(8-x)$; $[0;7]$.		
10.	$y=\ln\left(x^2-4\right)+\frac{1}{x^2-4}$.		

Варіант 28

1.	$y=2x^3+3$.		
2.	$y=3\operatorname{arctg}x+\frac{1}{81}\left(x^2+18\right)$;	$y=3\left(1-x^2\right)\left(1-2x^3\right)$;	$y=\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{3}}-\frac{\ln x}{\arccos x}$.
3.	$y=5^{\sin x}\cdot\cos 5x$	$y=\left(x^2+4x+5\right)e^{-2x}+\frac{3^{x-1}}{x+1}$	
4.	$y=(x+1)^{e^{x^2}}$.		
5.	$\begin{cases} x=\sqrt{t-3}; \\ y=\ln(t-2). \end{cases}$		
6.	$y=8x-x^2$; $x_0=0$; $y_0=0$.		
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+3^x}{1+3^{x+1}}$;	$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{2}{x^2-1}}$.	
8.	$y=4+2x-3\sqrt[3]{x^2}$.		
9.	$y=\frac{3-x^2}{x+3}$; $[-2;1]$.		
10.	$y=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$.		

Варіант 29

1.	$y=\dfrac{1}{x^2}$.
2.	$y=3\operatorname{tg}x+x^3\sqrt{x}$; $y=5\operatorname{arctg}x\cdot\lg x$; $y=\dfrac{3x+2}{\operatorname{tg}x}$.
3.	$y=9-\operatorname{arctg}5^x\cdot\cos 5x$; $y=\ln\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}+\operatorname{tg}\dfrac{3x+2}{6}$.
4.	$y=(\cos 2x)^{\ln 2x}$.
5.	$\begin{cases} x=\arccos t; \\ y=\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$
6.	$y=8x-x^2$; $x_0=8$; $y_0=0$.
7.	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}5x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$.
8.	$y=e^{-x^2}$.
9.	$y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; $\left[\dfrac{1}{4};e^2\right]$.
10.	$y=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2}$.

Варіант 30

1.	$y=\operatorname{tg}2x$.
2.	$y=3+2\ln x+\arcsin x$; $y=x^3\arcsin x+\dfrac{x^2+2}{3}\sqrt{x}$; $y=\dfrac{2x^2}{\ln x}-\dfrac{x+1}{x-1}$.
3.	$y=\dfrac{1}{2}-\sin 3x\cdot\cos 2x$; $y=\dfrac{1}{2}\sin^2\sqrt{x}-\dfrac{2}{5}\sin^5\sqrt{x}$.
4.	$y=(\cos x)^{x^2}$.
5.	$\begin{cases} x=\sin t; \\ y=\ln(\cos t). \end{cases}$
6.	$y=4-x^2$; $x_0=0$; $y_0=4$.
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln(\sin x)}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-1\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.
8.	$y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.
9.	$y=\dfrac{8}{x^4}$; $[1;8]$.
10.	$y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$.

Приклади тестів

Теоретичні питання.

1. Похідна оберненої функції $y = \arcsin x$ дорівнює ...

$$\text{а) } -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{б) } \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad \text{в) } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{г) } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Похідна функції $y = \operatorname{arctg} ax$ дорівнює ...

$$\text{а) } \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{б) } \frac{a}{1+a^2x^2}, \quad \text{в) } \frac{ax}{1+(ax)^2}, \quad \text{г) } \frac{a}{1-a^2x^2}.$$

3. Похідна добутку двох функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$ знаходять як ...

$$\text{а) } u'v - v'u, \quad \text{б) } \frac{u'}{v'}, \quad \text{в) } u'v + v'u, \quad \text{г) } u' - v'.$$

4. Похідну частки двох функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$ знаходять як ...

$$\text{а) } \frac{u'v + v'u}{v}, \quad \text{б) } \frac{u'v - v'u}{v}, \quad \text{в) } \frac{u'v - v'u}{v^2}, \quad \text{г) } u'v - v'u.$$

5. Необхідна умова екстремуму функції ...

$$\text{а) } f'(x) = 1, \quad \text{б) } f'(x) < 0, \quad \text{в) } f'(x) = 0, \quad \text{г) } f'(x) > 0.$$

6. Достатня умова максимуму функції в точці x_0...

$$\text{а) } f''(x_0) = 0, \quad \text{б) } f''(x_0) < 0, \quad \text{в) } f'(x_0) = 0, \quad \text{г) } f'(x_0) < 0.$$

7. Умова опуклості графіка функції ...

а) $f'(x) < 0$, б) $f''(x) < 0$, в) $f''(x) = 0$, г) $f'(x) > 0$.

Правильні відповіді: 1 – г, 2 – б, 3 – в, 4 – в, 5 – в, 6 – б, 7 – б.

Практична частина (розв'язання задач).

1. Знайти похідну в точці x_0, застосовуючи основні правила диференціювання:

а) $y = 10 \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$. Варіанти відповідей: $\frac{1}{5}$; 10; 5; 1.

б) $y = x^3 + \sin x$, $x_0 = 0$. Варіанти відповідей: 0,5; -1; $\frac{\pi}{2}$; 1.

2. Знайти похідну в точці x_0 складенної функції $y = (1 + \sin x)^2$, $x_0 = 0$. Варіанти відповідей: π; 2; 1; 0,5.

3. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = 2x^2$ в точці $x_0 = 1$. Варіанти відповідей: 0,5; -2; 4; 0.

4. Знайти кутовий коефіцієнт нормалі до кривої $y = 3x^3$ в точці $x_0 = 1$. Варіанти відповідей: $-0{,}5$; 1; 9; 0,25.

5. Знайти одну критичну точку I роду для функції $y = x^3 - 3x + 5$. Варіанти відповідей: 2; -1; 0; 1.

6. Знайти критичні точки II роду для функції $y = x^3 - 12x$. Варіанти відповідей: -1; $\frac{1}{12}$; 0; 6.

Література

1. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление, т.1 [Текст] / Н.С. Пискунов. — М.: Наука, 1985. — 432с.

2. *Овчинников П.П.* Вища математика [Текст] / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. — К.: Техніка, 2000. — 592с.

3. *Дубовик В.П.* Вища математика: навч. посібник [Текст] / В.П. Дубовик, І.І Юрик. — К.: А.С.К., 2001. — 648с.

4. *Смирнов В.М.* Курс высшей математики, т.1 [Текст] / В.М. Смирнов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 624с.

5. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] / Г.Н. Берман. — СПб.: Изд-во «Профессия» Наука, 2001. — 432с.

6. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах, ч.1 [Текст] / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. — М.: Высш. шк., 1996. — 304с.

7. *Запорожец Г.И.* Руководство к решению задач по математическому анализу [Текст] / Г.И. Запорожец. — М.: Высш. шк., 1966. — 461с.

8. Методические указания к выполнению индивидуальных семестровых заданий по дисциплине "Высшая математика"(раздел "Дифференциальное исчисление функций одной переменной") для студентов всех специальностей / Сост.: Е.А. Макаренков, А.В. Сясев. — Д.: НМетАУ, 2000. — 23с.

9. Вступ до математичного аналізу. Модуль 3: Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 3 / Уклад.: Т.М. Бусарова, О.В. Звонарьова, Н.В. Міхєєва, В.О. Петренко. – Д.: Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна 2007. — 58с.

Для нотаток